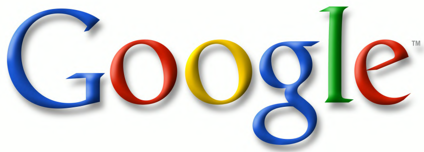


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

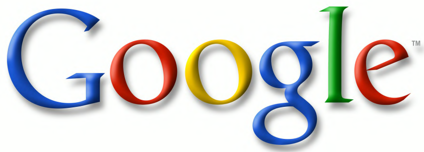
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

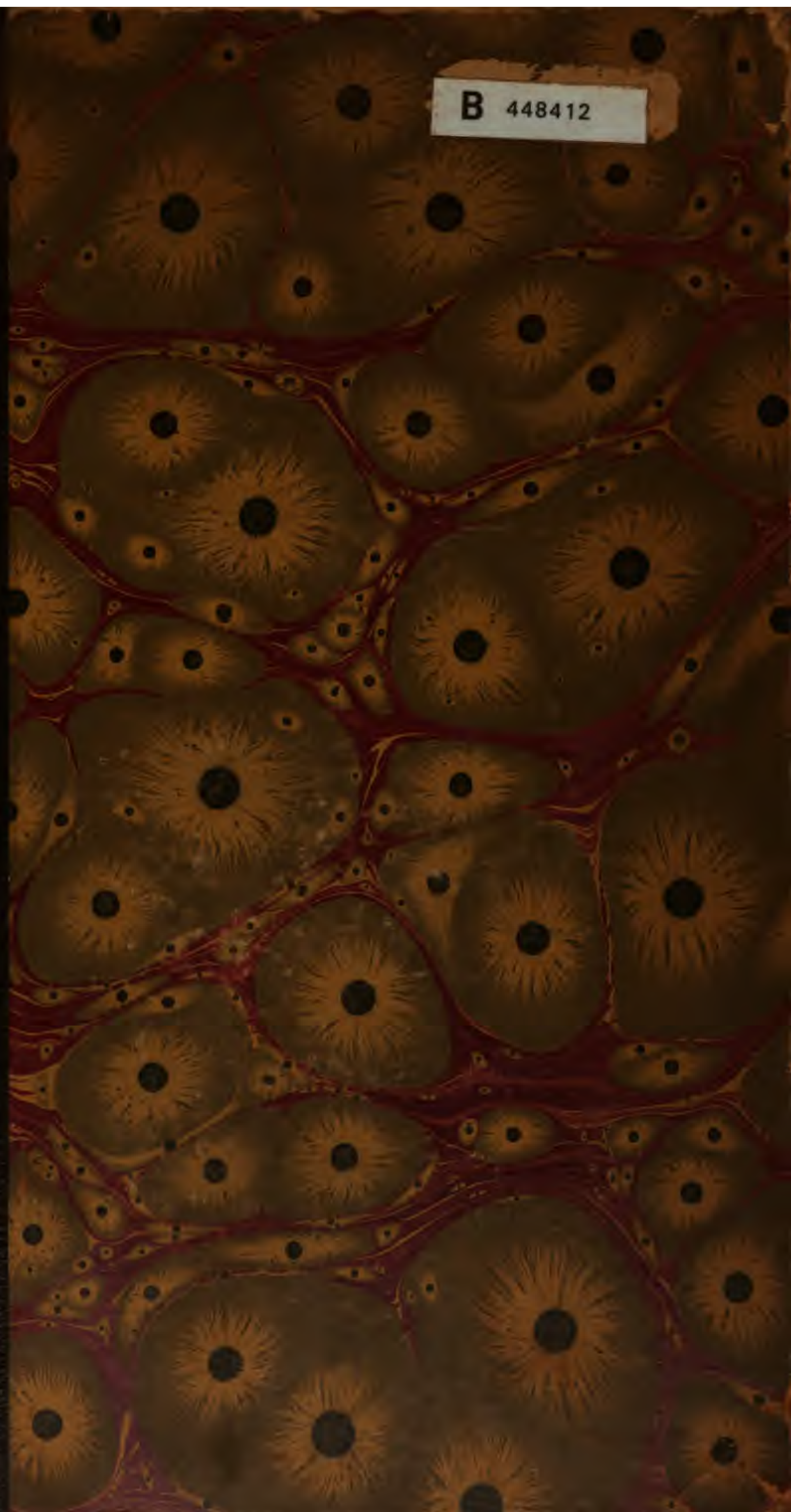
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

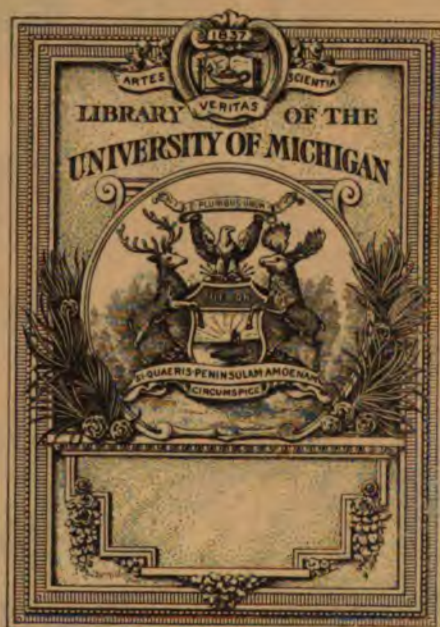
Nous vous demandons également de:

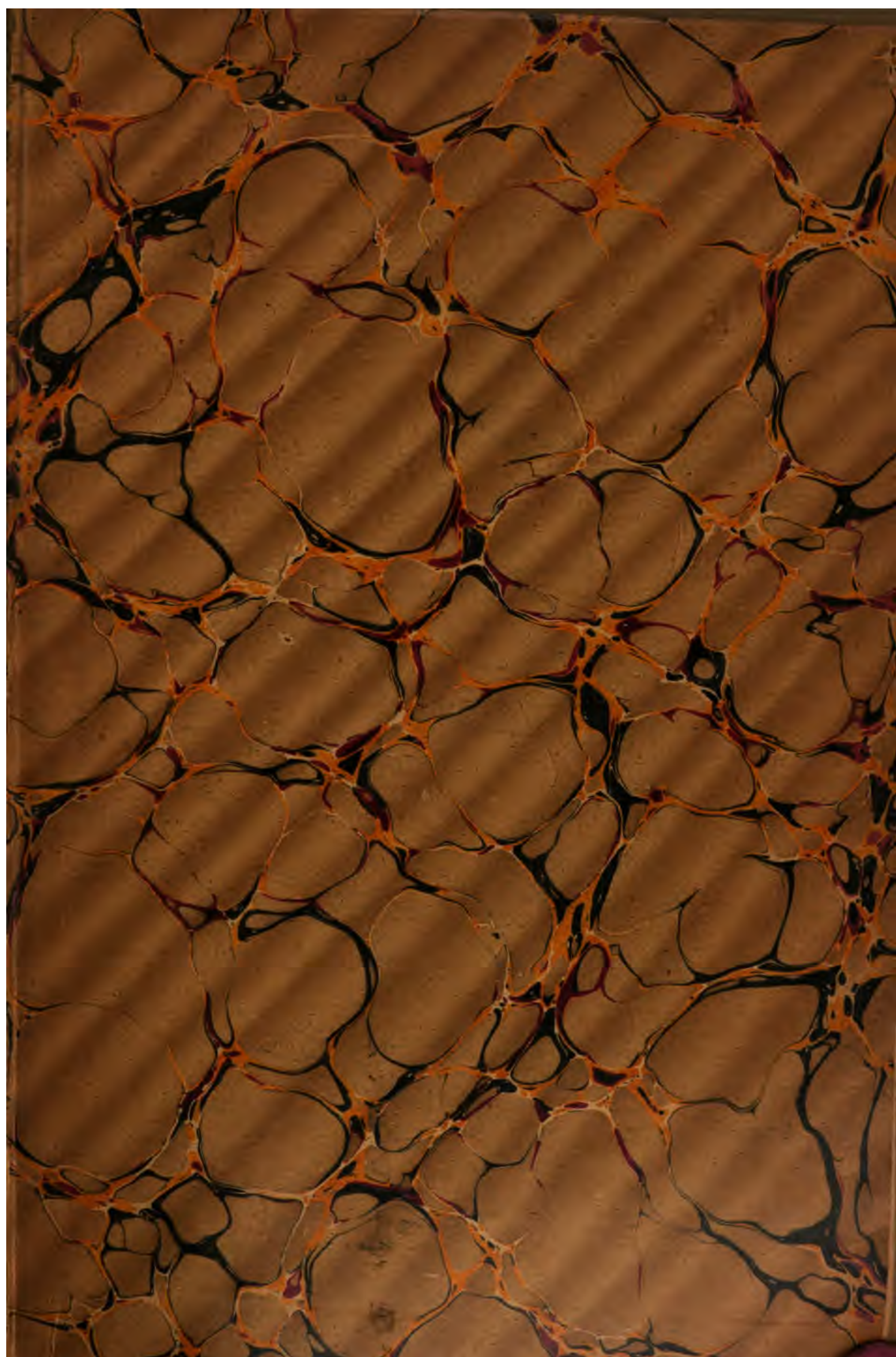
+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


B 448412


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



QA
841
.P77

LEÇONS

DE

CINÉMATIQUE

TOURS. — IMPRIMERIE DESLIS FRÈRES

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

LEÇONS

DE

61762

CINÉMATIQUE

Mécanismes, Hydrostatique, Hydrodynamique

Professées à la Sorbonne

PAR

P. PUISEUX

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Rédigées par **P. Bourguignon** et **H. Le Barbier**

PARIS

GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR

58, RUE SAINT-ANDRÉ-DES-ARTS, 58

1890



AVERTISSEMENT

Le présent travail, reproduction à peu près textuelle de conférences faites aux candidats à la licence, est avant tout un livre d'enseignement. C'est dire qu'il n'a pas la prétention d'épuiser les sujets dont il traite, et qu'il vise plus à la clarté qu'à la concision.

Je me suis efforcé, dans l'exposition des théories principales, d'employer concurremment la géométrie et l'analyse. L'emploi de cette dernière méthode entraîne à quelques longueurs, mais il est utile d'y recourir si l'on veut que les élèves conservent, dans l'application des mathématiques aux phénomènes naturels, les habitudes de généralité et de rigueur que l'enseignement de nos lycées a dû leur faire contracter.

On n'attend pas sans doute que je cite tous les ouvrages que j'ai mis à profit; je ne saurais toutefois, sans manquer à une obligation de reconnaissance, omettre de citer les travaux de MM. Résal, Poincaré et surtout les excellentes leçons professées à la Sorbonne par M. J. Tannery en 1876. MM. Le Barbier et Bourguignon ont droit également à tous mes remerciements pour les soins qu'ils ont bien voulu donner à la rédaction et à l'impression.

P. P.

Paris, mai 1890.

COURS DE CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS PRÉLIMINAIRES. — MOMENTS

1. Définition. — La cinématique est l'étude du mouvement des figures indépendamment des causes qui produisent ce mouvement.

Elle constitue une extension de la géométrie en ce sens qu'on ne se propose plus d'étudier un système à un instant déterminé, mais ses modifications avec le temps.

2. Notions préliminaires. — La notion de mouvement n'est pas une notion première : elle dérive de la notion d'espace et de la notion de temps.

L'espace, considéré comme grandeur arithmétique, a été défini en géométrie. Il se mesure par juxtaposition de corps ne laissant entre eux aucun intervalle. Suivant leur nature, ces corps pourront être pris comme unités de longueur, de surface ou de volume.

Le temps se mesure par un procédé analogue. On a recours à des phénomènes instantanés se reproduisant à intervalles

identiques. Un de ces intervalles peut être pris comme unité. La nature nous offre certains phénomènes jouissant de cette propriété : par exemple, le passage d'une étoile au méridien. L'intervalle de deux de ces passages consécutifs constitue une unité de temps appelée jour sidéral. Il faut pouvoir subdiviser cette unité, c'est-à-dire trouver un nouveau phénomène instantané dont la période soit une partie aliquote de la première. On se sert pour cela des petites oscillations du pendule qui sont isochrones.

Les métaphysiciens ont dit que le temps est le lieu des phénomènes, l'espace le lieu des corps, faisant ainsi ressortir l'analogie qui existe entre ces deux notions. Il y a cependant entre elles des différences. Ainsi le temps futur est conçu par nous comme n'existant pas : c'est une notion absolument fictive. Au contraire l'espace illimité est conçu comme existant réellement. De plus, l'espace a trois dimensions, c'est-à-dire que trois nombres sont nécessaires pour y fixer la position d'un point. Le temps n'a qu'une dimension.

Au point de vue du calcul, on peut regarder le temps comme analogue à l'espace compté sur une droite indéfinie à partir d'une certaine origine. Il est alors naturel de considérer les intervalles de temps comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils sont comptés dans l'avenir ou le passé à partir de l'origine choisie. Le plus souvent, en mécanique, on se donne les conditions initiales et l'on ne se préoccupe pas de ce qui s'est passé antérieurement, ce qui rend inutile la considération de temps négatifs. En astronomie, on choisit une époque origine déterminée par un phénomène exactement observé et on compte les temps comme positifs ou négatifs suivant qu'ils précèdent ou suivent l'époque du phénomène considéré.

Supposons donc qu'on soit en possession de procédés de mesure pour l'espace et pour le temps. Le mouvement devient alors facile à définir : on choisit un système de trois surfaces et l'on détermine la position du point dans ce système de coordonnées. Si le point occupe des positions différentes avec le temps, on dit qu'il est en mouvement ; la courbe qu'il décrit est appelée *trajectoire* et ses trois coordonnées sont fonctions du temps, qui est considéré comme variable indépendante. On peut aussi, dans quelques cas particuliers, le traiter comme une quatrième coordonnée et prendre pour variable indépendante une des coordonnées primitives. C'est ce qu'a fait Laplace dans la théorie de la lune où la variable indépendante est la longitude.

Nous avons supposé que les surfaces coordonnées étaient fixes. Il peut arriver au contraire qu'elles soient mobiles. Le mouvement du point par rapport à ce système de coordonnées sera ce qu'on appelle un mouvement relatif. Il y a lieu dans ce cas de distinguer la trajectoire relative du point, rapportée au système de coordonnées en mouvement, et sa trajectoire absolue, rapportée à un système fixe. En réalité, un tel système n'existe pas, puisque nous ne connaissons aucun corps à l'état de repos absolu.

On a, en cinématique, à considérer deux grandeurs d'espèce différente de celles qui se présentent en géométrie : la vitesse et l'accélération. Ce ne sont pas des longueurs, mais on peut les représenter par des segments de droite. Pour les définir il est nécessaire de rappeler quelques considérations géométriques.

3. Somme géométrique. — Dans un segment, nous con-

sidérerons la longueur, la direction et le sens dans lequel il est parcouru.

Soient deux segments AB et CD; leur *somme géométrique* est un troisième segment obtenu de la manière suivante.

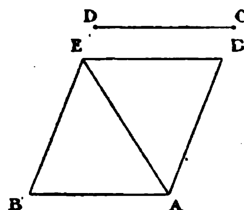


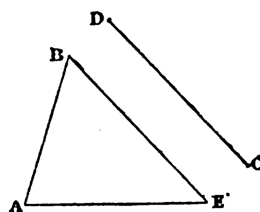
Fig. 1.

Par l'extrémité B du premier, on mène BE égal et parallèle au second et l'on joint l'origine A du premier segment au point E. La droite AE est la somme géométrique des deux segments AB et CD, ce qu'on exprime par la formule symbolique :

$$(AE) = (AB) + (CD).$$

AE est encore la diagonale du parallélogramme construit sur les deux segments AB et CD, c'est pourquoi on l'appelle quelquefois résultante des deux segments, par analogie avec la résultante de deux forces.

On arrive au même point E en suivant l'un ou l'autre des contours ABE et AB'E. C'est dire qu'on peut intervertir les deux termes d'une somme géométrique. On a donc :



Fig, 2.

$$(AB) + (CD) = (CD) + (AB).$$

Mais si l'on mène la parallèle BE' en sens inverse de celui de CD et qu'on joigne AE', cette longueur AE' est appelée différence géométrique des deux segments AB et CD, ce qu'on

écrit :

$$(1) \qquad (AE') = (AB) - (CD).$$

On a aussi :

$$(2) \qquad (AE') = (AB) + (BE') = (AB) + (DC).$$

En comparant les égalités (1) et (2) on voit qu'on doit considérer CD comme égal et de signe contraire à DC.

4. Projections. — Projetons un segment AB sur un axe Ox et regardons la direction Ox comme positive, la direction opposée Ox' comme négative. La projection ab du segment AB est positive si b est, par rapport à a, du côté des x positifs, et négative dans le cas contraire.

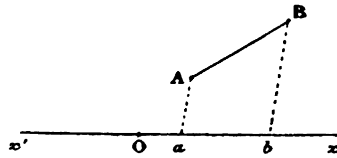


Fig. 3.

Si l'on projette sur Ox deux segments AB et CD et d'autre part leur somme géométrique AE, on sait que la somme des projections $ab + be$ est égale à la projection ae de la somme

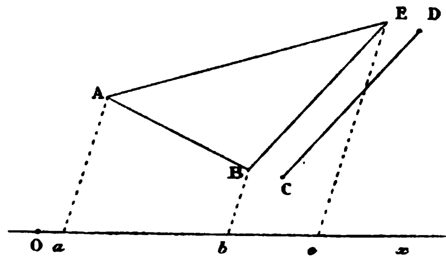


Fig. 4.

géométrique, égalité qui a toujours lieu en tenant compte des signes.

Ces propositions s'étendent à un nombre quelconque de segments. On appellera somme géométrique la droite qui ferme le contour obtenu en menant par un point fixe une parallèle au premier segment, et par l'extrémité de chaque segment une droite égale et parallèle au suivant. Ce qui précède montre que l'on peut, sans changer la somme, intervertir l'ordre de deux segments consécutifs.

On en conclut, par un raisonnement employé en algèbre élémentaire, qu'on peut intervertir l'ordre de deux segments quelconques dans une somme géométrique.

5. Expression analytique de la somme géométrique de plusieurs segments. — On définit un segment par ses projections sur trois axes que nous prendrons toujours rectangulaires; le segment est ainsi déterminé en grandeur, direction et sens, mais on reste libre de le déplacer dans l'espace parallèlement à lui-même.

Soient des segments de longueurs $a_1, a_2, \ldots a_k$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, les cosinus des angles que fait la direction de chaque segment avec les trois axes coordonnés. Appelons α, β, γ, les cosinus des angles que fait la direction inconnue de la somme géométrique avec les axes et a la grandeur de cette somme. En donnant à α, β, γ, des signes convenables, nous pourrons faire en sorte que a soit une quantité toujours positive. Car deux segments de cosinus directeurs α, β, γ et $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ sont parallèles et de sens opposés, et, par suite, porter a dans un sens revient à porter $-a$ dans le sens opposé.

Le théorème des projections, appliqué successivement aux

trois axes, donne les relations :

$$(1) \qquad a\alpha = \sum_{i=1}^{i=k} a_i \alpha_i$$

$$(2) \qquad a\beta = \sum_{i=1}^{i=k} a_i \beta_i$$

$$(3) \qquad a\gamma = \sum_{i=1}^{i=k} a_i \gamma_i.$$

Élevons au carré les deux membres de chacune de ces équations et ajoutons-les ; nous aurons :

$$a^2 = \sum a_i^2 + 2\sum\sum a_i a_j (\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j).$$

Or

$$\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \cos(a_i, a_j).$$

Par suite :

$$a^2 = \sum a_i^2 + 2\sum\sum a_i a_j \cos(a_i, a_j).$$

a étant toujours positif, cette dernière égalité détermine sans ambiguité la grandeur de la somme géométrique. Sa direction est donnée par les équations

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} a_i \alpha_i}{a}$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} a_i \beta_i}{a}$$

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} a_i \gamma_i}{a}.$$

6. Moments. — Une autre notion importante, que nous emploierons fréquemment dans la suite, est celle des moments.

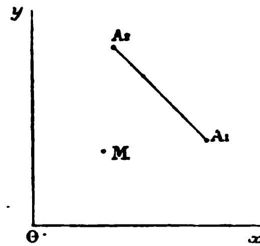


Fig. 5.

Soient un segment A_1A_2 et un point M extérieur à ce segment. Dans le plan MA_1A_2 prenons deux axes rectangulaires Ox, Oy et soient x, y les coordonnées de M, x_1, y_1 celles de l'origine A_1 du segment, x_2, y_2 celles de son extrémité A_2.

On appelle *moment* du segment A_1A_2 par rapport au point M le déterminant suivant, pris avec son signe :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

En valeur absolue, le moment est égal au double de l'aire du triangle MA_1A_2. En effet, si on regarde x, y comme coordonnées courantes, l'équation de la droite indéfinie A_1A_2 est :

$$\Delta = 0.$$

Soit δ la distance de M à la droite A_1A_2. Sa valeur est :

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = \pm \frac{\Delta}{A_1A_2}.$$

Donc :

$$\Delta = \pm \delta A_1A_2.$$

Cette aire doit être prise, suivant les cas, avec le signe + ou avec le signe —. Nous allons déterminer les circonstances géométriques correspondantes.

Le déterminant Δ varie d'une manière continue, en conservant le même signe, lorsque M se déplace dans le plan sans jamais venir sur la direction A_1A_2, auquel cas Δ s'annulerait et changerait de signe. Supposons donc qu'on déforme l'angle A_1MA_2 sans jamais placer un côté dans le prolongement de l'autre et de façon que M vienne en O et MA_1 sur Ox; MA_2 pourra alors être amené en coïncidence soit avec Oy, soit avec Oy'. Dans le premier cas, le déterminant Δ devient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ 0 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2,$$

valeur positive, qui montre que Δ avait précédemment le signe +. On dit alors que l'angle A_1MA_2 présente la *disposition* xOy; un observateur, dont les pieds seraient en M sur le plan de la figure et la tête en avant de ce plan, ferait alors coïncider MA_1 avec MA_2 par une rotation dans le sens de Ox vers Oy. Dans le deuxième cas, au contraire, le déterminant Δ, qui devient toujours égal à x_1y_2, sera négatif, et par suite Δ avait précédemment le signe —. L'angle A_1MA_2 présente alors la *disposition* yOx.

Par conséquent, le moment est positif si A_1MA_2 a la disposition xOy, négatif si A_1MA_2 a la disposition yOx.

7. Disposition d'un angle trièdre. — Soit SABC un angle trièdre. Pour définir sa position, on regarde SA comme analogue de Ox, SB de Oy, SC de Oz. Supposons qu'on

déforme le trièdre d'une manière continue, sans jamais placer une arête dans le plan des deux autres. On peut concevoir qu'on amène, par une déformation de ce genre, S en O, SA en coïncidence avec Ox, SB avec Oy. Alors SC pourra s'appliquer soit sur Oz, soit sur Oz'. Dans le premier cas, le trièdre sera dit offrir la *même disposition que le trièdre des axes*, dans le second, une *disposition inverse*.

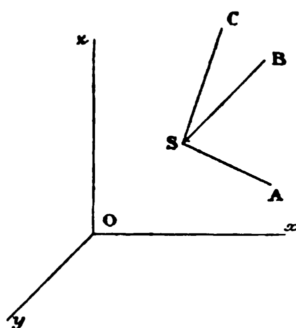


Fig. 6.

Chacune de ces dispositions correspond à une condition analytique déterminée. En effet, désignons par $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ les cosinus directeurs des trois arêtes, comme l'indique le tableau suivant :

	Ox	Oy	Oz
SA	α	β	γ
SB	α'	β'	γ'
SC	α''	β''	γ''

et considérons le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

Il varie d'une manière continue, en conservant le même signe, quand on déforme le trièdre sans jamais placer les trois arêtes dans un même plan, auquel cas il s'annulerait. Pour le trièdre $Oxyz$ on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et pour le trièdre $Oxyz'$:

$$\Delta = -1.$$

Par suite, Δ sera positif pour tout trièdre ayant la disposition du trièdre des axes, et négatif pour une disposition inverse.

8. Application. — Ce qui précède permet de répondre à la question suivante.

Étant données deux droites SA, SB faisant entre elles un angle aigu V, par le point de concours de ces deux droites on élève une perpendiculaire à leur plan et l'on demande de distinguer les deux sens de cette perpendiculaire.

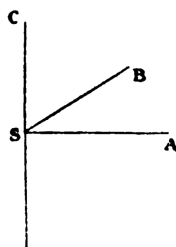


Fig. 7.

Nous chercherons par exemple le sens SC, tel que le trièdre SABC ait la disposition $Oxyz$.

Soient $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, les cosinus directeurs de SA, SB, $\alpha''\beta''\gamma''$ ceux de SC. SC étant perpendiculaire à SA et SB, on a les deux équations :

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{\alpha''}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}=\frac{\beta''}{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}=\frac{\gamma''}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}=\frac{\pm 1}{\sqrt{(\beta\gamma'-\gamma\beta')+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}}.$$

D'après l'identité de Lagrange, ces rapport sont égaux à :

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2}}=\frac{\pm 1}{\sin V}$$

en désignant par V l'angle, plus petit que 180°, que forment entre elles les deux droites données.

Une nouvelle combinaison des rapports précédents montre qu'ils sont encore égaux à :

$$\frac{\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2}{\alpha''(\beta\gamma'-\gamma\beta')+\beta''(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')+\gamma''(\alpha\beta'-\beta\alpha')}=\frac{1}{\Delta}$$

d'où l'on conclut :

$$\Delta=\pm\sin V.$$

Or le trièdre SABC ayant la disposition $Oxyz$, le premier membre est positif ; le second membre doit l'être aussi et, V étant moindre que 180°, il faut prendre le signe + devant sin V. On a donc sans ambiguité :

$$\alpha''=\frac{\beta\gamma'-\gamma\beta'}{\sin V},$$

$$\beta''=\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\sin V},$$

$$\gamma''=\frac{\alpha\beta'-\beta\alpha'}{\sin V}.$$

9. Représentation géométrique des moments. —

Soient un segment A_1A_2 et un point M extérieur à ce segment. On mène par M une perpendiculaire au plan MA_1A_2, et on porte sur cette perpendiculaire une longueur MC, représentée par le même nombre que le double de l'aire du triangle MA_1A_2, dans un sens tel que le trièdre MA_1A_2C ait la disposition $Oxyz$. MC représente le moment de A_1A_2 par rapport à M.

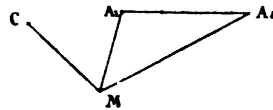


Fig. 8.

10. Moment par rapport à un axe. — Soient un segment A_1A_2 et un axe quelconque DD_1. Le moment du segment A_1A_2 par rapport à cet axe est égal au moment de la projection a_1a_2 de A_1A_2 sur un plan quelconque, perpendiculaire à DD_1 par rapport au point O, trace de l'axe sur le plan. Ce moment est représenté par une longueur OC portée sur l'axe DD_1 dans le sens que nous avons défini précédemment.

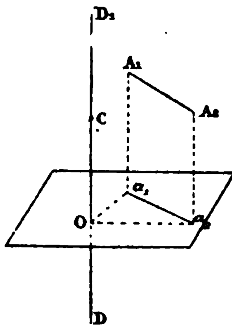


Fig. 9.

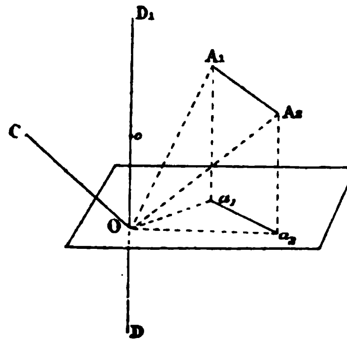


Fig. 10.

THÉORÈME I. — Le moment d'un segment par rapport à un

axe quelconque est égal à la projection sur cet axe du moment du même segment par rapport à un point quelconque de l'axe.

Soient un segment A_1A_2, un axe quelconque DD_1 et un point O sur cet axe. Par O menons un plan perpendiculaire à DD_1. Soient Oc la longueur qui représente le moment de A_1A_2 par rapport à l'axe, OC celle qui représente le moment du même segment par rapport au point O, et i l'angle aigu des deux plans A_1OA_2, a_1Oa_2.

On a entre les aires des triangles A_1OA_2 et a_1Oa_2 la relation :

$$a_1Oa_2 = A_1OA_2 \cos i.$$

Mais les grandeurs OC, Oc sont respectivement égales au double de l'aire des triangles A_1OA_2 et a_1Oa_2. On a donc :

$$Oc = OC \cos i.$$

Au point de vue des valeurs absolues, Oc est bien la projection de OC. Il reste à montrer que l'égalité précédente a lieu en tenant compte du sens des segments. En effet, pour un observateur placé suivant Oc, l'angle a_1Oa_2 offre la disposition xOy : il en est de même de l'angle A_1OA_2. Ce même angle offre encore la disposition xOy pour un observateur placé suivant OC. Par suite, Oc et OC sont situés du même côté du plan A_1OA_2 et l'angle de ces deux segments est bien égal à l'angle aigu des deux plans.

11. Expression des projections sur les axes coordonnés du moment d'un segment par rapport à un point. — Soient A_1A_2 un segment ; M un point extérieur ; l, m, n les

projections cherchées. Appelons x, y, z les coordonnées de M ; x_1, y_1, z_1, celles de l'origine A_1 du segment ; x_2, y_2, z_2 celles de son extrémité A_2. La projection n sur Oz est égale à la projection sur Mz', parallèle à Oz. C'est donc le moment

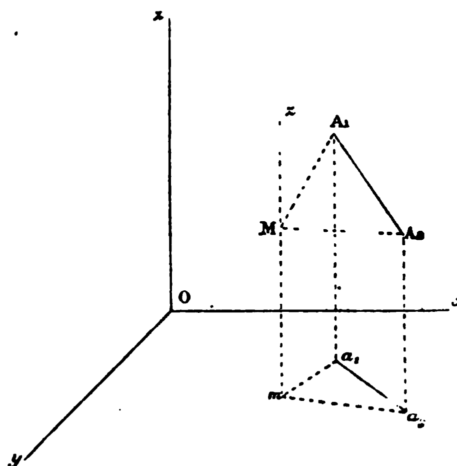


Fig. 11.

du segment A_1A_2 par rapport à l'axe Mz', ou bien encore, d'après le théorème I, le moment du segment a_1a_2, projection de A_1A_2 sur xOy, par rapport au point m, trace de Mz' sur xOy. On a donc :

$$n = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

ou, en désignant par p, q, r les projections du segment A_1A_2 sur les axes :

$$n = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ p & q & 0 \end{vmatrix} = p\,(y - y_1) - q\,(x - x_1).$$

Les valeurs de l, m, n sont donc :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} l = q(z - z_1) - r(y - y_1) \\ m = r(x - x_1) - p(z - z_1) \\ n = p(y - y_1) - q(x - x_1). \end{cases}$$

On en déduit les identités:

$$lp + mq + nr = 0$$
$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$$

qui expriment, la première que la droite représentant le moment est perpendiculaire à A_1A_2, la seconde, qu'elle est perpendiculaire à A_1M.

En supposant l'origine du segment à l'origine des coordonnées, on a les formules importantes :

$$(\beta) \quad \begin{cases} l = qz - ry \\ m = rx - pz \\ n = py - qx. \end{cases}$$

12. Théorème de Varignon. — Si on considère un nombre quelconque de segments ayant même origine, le moment de leur somme géométrique par rapport à un point quelconque est la somme géométrique des moments des composantes par rapport au même point.

Les moments, tels que nous les avons définis, sont des grandeurs géométriques indépendantes du choix des axes ; on peut donc prendre pour l'origine celle des coordonnées.

Soient p_1, q_1, r_1 ; $p_2, q_2, r_2, \ldots p_n, q_n, r_n$ les projections des segments sur les trois axes, P,Q,R les projections de leur somme

géométrique. On a, d'après le théorème des projections :

$$\left\{\begin{array}{l} P = \sum p_i \\ Q = \sum q_i \\ R = \sum r_i \end{array}\right.$$

et le moment de la somme géométrique, par rapport au point dont les coordonnées sont x, y, z, a pour projections :

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} L = Qz - Ry \\ M = Rx - Pz \\ N = Py - Qx \end{array}\right.$$

Considérons d'autre part les projections

$$l_1\, m_1\, n_1,\; l_2\, m_2\, n_2,\; \ldots\ldots\; l_n\, m_n\, n_n$$

des moments de chaque segment ; on a :

$$\left\{\begin{array}{l} l_i = q_i z - r_i y \\ m_i = r_i x - p_i z \\ n_i = p_i y - q_i x \end{array}\right.$$

La somme géométrique de tous ces moments aura pour projections :

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \sum l_i = z\sum q_i - y\sum r_i = Qz - Ry \\ \sum m_i = x\sum r_i - z\sum p_i = Rx - Pz \\ \sum n_i = y\sum p_i - x\sum q_i = Py - Qx \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit, en comparant les égalités (1) et (2)

$$\left\{\begin{aligned} L &= \sum l_i \\ M &= \sum m_i \\ N &= \sum n_i \end{aligned}\right.$$

ce qui démontre le théorème.

13. Expressions des moments d'un segment par rapport aux axes coordonnés. — Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'origine A_1 du segment, p, q, r ses projections sur les axes coordonnés, λ, μ, ν les moments cherchés ; λ, μ, ν seront, d'après le théorème I, les projections sur les axes du moment du segment considéré par rapport à l'origine des coordonnées. On les obtiendra donc en faisant, dans les formules (α), $x = 0$ $y = 0$ $z = 0$, ce qui donne :

$$(\gamma) \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= ry_1 - qz_1 \\ \mu &= pz_1 - rx_1 \\ \nu &= qx_1 - py_1 \end{aligned}\right.$$

Pour écrire de mémoire, sans erreur de signe, les formules (β) et (γ), on se sert d'un cas particulier.

Si l'on veut les projections du moment d'un segment par rapport à un point, on supposera que le segment coïncide avec Ox et que le point M soit sur Oy (*fig.* 12); alors $p = OA_2$, $q = 0$, $r = 0$, et l'on a, pour les coordonnées de M, $x = 0$, $y > 0$, $z = 0$. Le moment, qui est en valeur absolue le double de l'aire du triangle OMA_2, sera py, et, par définition, il doit être porté

sur une parallèle Mz à Oz. La projection sur Oz est donc py. Cela montre que, dans le cas général,

$$n = py - qx$$

et non $qx - py$.

De même, s'il s'agit du moment d'un segment par rapport aux axes coordonnés, nous supposerons que le segment A_1A_2

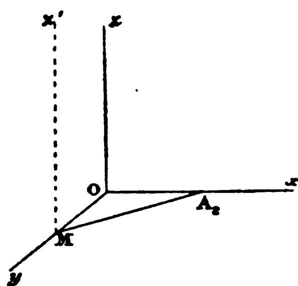


Fig. 12.

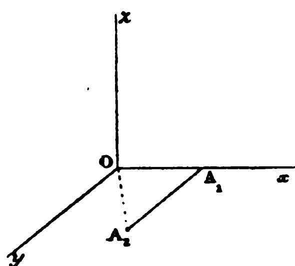


Fig. 13.

(*fig.* 13), situé dans le plan des xy, est parallèle à Oy, et que son origine A_1 est sur Ox. Alors ν, qui est le double de l'aire A_1OA_2, sera égal à qx_1 et porté sur Oz. Par suite, dans le cas général,

$$\nu = qx_1 - py_1$$

et non $py_1 - qx_1$.

14. Expressions du moment d'un segment par rapport à un axe quelconque. — Soit un axe de cosinus directeurs α, β, γ passant par un point M de coordonnées x, y, z. Définissons le segment A_1A_2 par les coordonnées x_1, y_1, z_1, de son origine A_1 et ses projections p, q, r sur les axes.

Pour avoir le moment du segment par rapport à l'axe

considéré, il suffira, d'après le théorème I, de projeter sur l'axe le moment de A_1A_2 par rapport à M. Les projections de ce moment sont [formules (α)] :

$$l = q\,(z - z_1) - r\,(y - y_1).$$
$$m = r\,(x - x_1) - p\,(z - z_1)$$
$$n = p\,(y - y_1) - q\,(x - x_1)$$

Pour projeter ce moment sur l'axe, on projettera successivement ses composantes et on fera la somme des résultats. On obtient ainsi pour le moment cherché la valeur :

$$M = l\alpha + m\beta + n\gamma$$

CHAPITRE II

ÉTUDE DE LA VITESSE ET DE L'ACCÉLÉRATION

15. Équations du mouvement. — Un mobile étant rapporté à des axes fixes rectangulaires, son mouvement sera connu lorsqu'on pourra calculer sa position à un instant donné. On considère donc ses coordonnées comme fonctions du temps :

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t)$$
$$z = \psi(t)$$

Si on élimine t entre ces équations, on obtient deux équations entre x, y, z :

$$F(x,y,z) = 0$$
$$\Phi(x,y,z) = 0$$

Ces deux équations, prises ensemble, doivent être vérifiées à chaque instant par les coordonnées du mobile. Elles représentent, en général, une courbe gauche qui est la trajectoire,

16. Mouvement rectiligne uniforme. — On appelle ainsi un mouvement dans lequel la direction est invariable, et tel que les espaces parcourus dans des temps égaux sont égaux. C'est le mouvement d'un point soustrait à toute force extérieure.

Dans un pareil mouvement, il est naturel de considérer l'espace parcouru dans l'unité de temps ; c'est ce qu'on appelle *vitesse* du mobile. On peut aussi la définir le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir.

17. Mouvement curviligne. — En général, un point matériel décrit une courbe. Si on inscrit dans cette courbe une ligne polygonale, et qu'on fasse tendre les côtés de cette ligne vers zéro, la limite est indépendante de la loi de décroissance des côtés. On peut donc considérer la longueur d'un arc de courbe comme ayant un sens bien défini. Si les arcs parcourus dans des temps égaux sont égaux, on dira que le mouvement est curviligne uniforme, et la vitesse pourra encore être exprimée par le rapport de l'espace au temps employé à le parcourir.

Supposons que le mouvement ne soit pas uniforme. Nous appellerons *vitesse moyenne* dans l'intervalle AB (*fig.* 14) le quotient de la longueur Δs de l'arc AB par le temps Δt employé à le parcourir. Cette vitesse serait celle d'un mobile fictif, animé d'un mouvement uniforme, qui partirait de A en même temps que le mobile vrai,

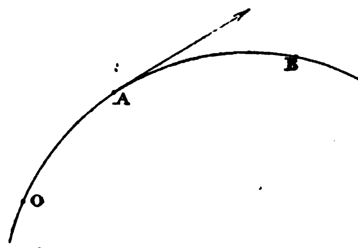


Fig. 14.

et arriverait en B en même temps que lui. Si maintenant on suppose que A soit fixe et que l'extrémité B se rapproche de plus en plus de A, le rapport de l'arc au temps employé à le parcourir tend vers une certaine limite qu'on appelle *vitesse au point A*. Cette vitesse sera par suite égale à $\frac{ds}{dt}$. On la représente géométriquement en portant sur la tangente en A à la trajectoire, dans le sens du mouvement, une longueur égale à la valeur absolue de $\frac{ds}{dt}$. Toutefois, il faut remarquer que la vitesse n'est pas une longueur, mais le quotient d'une longueur par un temps. On peut cependant la représenter par une longueur en supposant choisies les unités de longueur et de temps.

Théorème. — Si on projette un mobile sur un axe quelconque, la vitesse du mobile projection est égale en grandeur et signe à la projection de la vitesse du mobile.

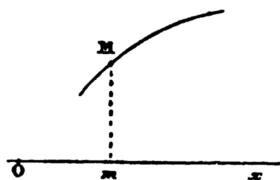


Fig. 15.

Prenons l'axe considéré pour axe des x. Projetons le mobile M en m (*fig.* 15). La distance Om sera à chaque instant représentée par x et la vitesse de m sera par définition $\frac{dx}{dt}$. Elle devra être portée du côté des x positifs si $\frac{dx}{dt}$ est positif, du côté des x négatifs dans le cas contraire.

Or, on a identiquement :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$\frac{ds}{dt}$ représente en valeur absolue la vitesse du mobile M, $\frac{dx}{ds}$ le cosinus de l'angle que fait la tangente, menée dans le sens des arcs croissants, avec la direction des x positifs. Donc, le second membre représente la projection de la vitesse du mobile M sur Ox.

Il est d'ailleurs évident que l'abscisse est croissante quand la direction du mouvement fait un angle aigu avec Ox, décroissante dans le cas contraire. L'égalité a donc lieu en tenant compte du sens des segments.

18. Projections de la vitesse. — Si on applique le théorème précédent aux trois axes coordonnés, on trouve, pour valeur des projections de la vitesse :

$$\left\{ \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right.$$

Théorème. — Si on projette un mobile sur un plan, la vitesse du mobile projection est égale à la projection de la vitesse du mobile considéré.

En effet, prenons le plan dont il s'agit pour plan des xy ; la vitesse du mobile M est la somme géométrique :

$$(V) = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dt}\right)$$

la vitesse de sa projection m est :

$$(v) = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)$$

et cette dernière quantité est manifestement la projection de (V).

19. Mouvement de rotation d'une figure plane. — Soit une figure plane assujettie à ne pas sortir de son plan. Si l'on fixe un de ses points, O, le seul mouvement possible est un mouvement de rotation autour de ce point. Dans ce mouvement, toutes les droites de la figure tournent du même angle $\Delta\alpha$ pendant le même temps Δt. Considérons l'angle α d'une de ces droites avec une droite fixe passant par le point O. Si α varie proportionnellement au temps, on appellera vitesse angulaire la variation de cet angle dans l'unité de temps ou encore le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$. En général, α ne varie pas proportionnellement au temps, et on appelle *vitesse angulaire* la limite du rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro, c'est-à-dire la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$. Nous la désignerons par ω ; il est inutile de spécifier de quelle droite on se sert pour définir α et quelle est la droite origine choisie : car, changer l'une ou l'autre de ces droites revient à ajouter une constante à α, ce qui ne modifie pas sa dérivée.

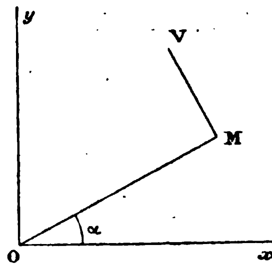


Fig. 16.

20. Représentation géométrique de la vitesse. — Prenons pour origine des coordonnées le point fixe O (*fig.* 16)

et pour axe des x la droite origine de l'angle α, l'axe des y lui étant perpendiculaire. Soit M un point quelconque de la figure mobile, r sa distance au point fixe, xy ses coordonnées. On a les relations :

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

Les composantes de la vitesse suivant les axes sont donc :

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt} = -\omega y$$
$$\frac{dy}{dt} = r\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = \omega x$$

Ce qu'on peut écrire :

$$\frac{dx}{dt} = r\omega\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = r\omega\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sous cette forme, l'interprétation géométrique est évidente. Considérons la direction MV faisant avec Ox l'angle $\alpha + \frac{\pi}{2}$, et portons sur cette direction un segment égal en valeur absolue à $r\omega$ dans la direction MV si ω est positif, dans la direction opposée si ω est négatif. Ce segment représentera la vitesse du point M.

21. Mouvement de rotation d'un corps solide. — Cette notion de vitesse angulaire s'étend aux corps de l'espace. Soit un corps solide ayant deux points fixes ; le seul mouvement

possible de ce corps est un mouvement de rotation autour de la droite joignant ces deux points. Dans ce mouvement :

1° Tous les plans liés au système solide et perpendiculaire à l'axe ne peuvent que glisser sur eux-mêmes ;

2° Tous les plans passant par l'axe ou parallèles à l'axe tournent du même angle dans le même temps ;

3° Un point quelconque du système ne peut que décrire un cercle ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur l'axe.

Pour définir la vitesse angulaire, faisons passer par l'axe de rotation un plan fixe et un plan invariablement lié au solide. Soit α leur angle ; la dérivée $\frac{d\alpha}{dt}$ sera la *vitesse angulaire* du système solide. Pour les mêmes raisons que précédemment (**19**), il est inutile de spécifier de quel plan mobile on se sert pour définir α et quel est le plan origine choisi.

22. Représentation géométrique de la vitesse. — Prenons l'axe de rotation pour axe des z (*fig.* 17), le plan origine de α pour plan xOz. Soit M un point quelconque du système de coordonnées x,y,z, m sa projection sur xOy, α l'angle de MOz avec le plan xOz, r la distance Om. On a les relations :

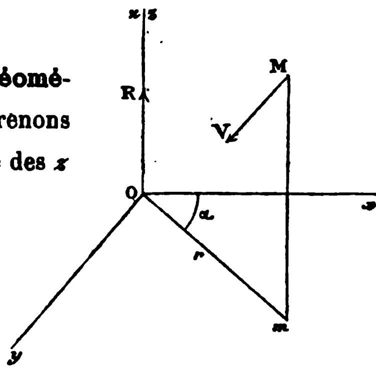


Fig. 17.

$$x = r \cos \alpha$$
$$y = r \sin \alpha$$
$$z = C^{te}$$

Les composantes de la vitesse sont par suite :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

ce qu'on peut encore écrire ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = r\omega \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = r\omega \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

Ces formules conduisent à la représentation géométrique suivante de la vitesse. Par M menons MV perpendiculaire à MOz dans le sens où α augmente si ω est positif, dans le sens où α diminue si ω est négatif, et portons sur MV une longueur égale à $r\omega$. Ce segment MV représente la vitesse du point M.

On peut encore représenter cette vitesse angulaire par un moment. En effet, convenons de porter sur l'axe de rotation un segment OR égal en valeur absolue à ω, dans le sens Oz si α augmente avec le temps, dans le sens Oz' s'il diminue. La vitesse MV est alors, en grandeur, direction et sens, le moment du segment OR par rapport au point M. Le sens que nous venons de définir pour le segment OR est tel qu'un observateur ayant les pieds à l'origine du segment et la tête à l'extrémité voit la rotation s'effectuer dans le sens où α augmente.

23. Expressions analytiques des composantes de la vitesse dans un mouvement de rotation autour d'un axe quelconque. — L'axe de rotation étant l'axe des z, nous avons vu (**22**), que les composantes de la vitesse étaient :

$$V_x = -\omega y$$
$$V_y = \omega x$$
$$V_z = 0$$

Supposons que l'axe de rotation soit une droite quelconque passant par l'origine et désignons par p,q,r les composantes suivant les axes de la vitesse angulaire supposée portée sur l'axe dans le sens défini. Les composantes de la vitesse du point M de coordonnées x,y,z sont alors :

$$V_x = qz - ry$$
$$V_y = rx - pz$$
$$V_z = py - qx$$

Enfin, si l'axe de rotation est une droite quelconque passant par le point de coordonnées $x_1 y_1 z_1$ et si pqr sont les composantes de la vitesse de rotation portée sur l'axe dans le sens défini, les composantes de la vitesse sont :

$$V_x = q(z - z_1) - r(y - y_1)$$
$$V_y = r(x - x_1) - p(z - z_1)$$
$$V_z = p(y - y_1) - q(x - x_1)$$

24. Composantes de la vitesse d'un point mobile dans un plan suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur. — Nous avons défini (**18**) la vitesse pour

un point de coordonnées x,y par la formule :

$$(v) = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\right)$$

les deux composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ étant portées sur les axes dans le sens indiqué par leurs signes. Ce mode de représentation n'est pas toujours le plus avantageux. En coordonnées polaires, il peut être utile de connaître les projections de la vitesse sur le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur.

Les formules de transformation sont :

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

On en déduit :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Les composantes cherchées sont donc $\frac{dr}{dt}$ portée sur OM

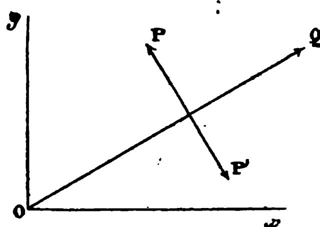


Fig. 18.

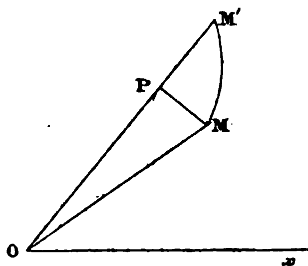


Fig. 19.

(*fig.* 18), du côté opposé à O si r est croissant, dans le sens in-

verse si r est décroissant; et $r\,\frac{d\theta}{dt}$ portée suivant MP si $\frac{d\theta}{dt}$ est positif, suivant MP′ si $\frac{d\theta}{dt}$ est négatif.

On aurait pu obtenir géométriquement ces résultats. Soit M (*fig.* 19) la position du mobile à l'époque t, M′ sa position à l'époque $t + \Delta t$. Pendant l'intervalle Δt, les coordonnées r et θ éprouvent les variations Δr, $\Delta\theta$. Abaissons MP perpendiculaire sur OM′. Par définition, la vitesse en M est la limite de $\frac{MM'}{\Delta t}$ quand Δt est infiniment petit. Or,

$$(MM') = (MP) + (PM')$$

par suite :

$$\left(\lim \frac{MM'}{\Delta t}\right) = \left(\lim \frac{MP}{\Delta t}\right) + \left(\lim \frac{PM'}{\Delta t}\right).$$

Mais

$$\lim \frac{PM'}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

$$\lim \frac{MP}{\Delta t} = \lim r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\,\frac{d\theta}{dt}$$

Les composantes cherchées sont donc $\frac{dr}{dt}$ porté sur la direction limite de PM′, c'est-à-dire sur le rayon vecteur OM, si r est croissant, et $r\,\frac{d\theta}{dt}$ porté suivant la direction limite de MP, c'est-à-dire suivant la perpendiculaire au rayon vecteur dans le sens où θ augmente.

25. Décomposition de la vitesse d'un point mobile dans l'espace, en faisant usage : 1° des coordonnées semi-polaires; 2° des coordonnées polaires. — Les divers

systèmes coordonnés sont toujours formés de trois surfaces orthogonales.

1° En coordonnées semi-polaires ou cylindriques, par exemple, un point M (*fig.* 20) de projection m sur xOy est défini par la distance O$m = r$, l'angle xO$m = \varphi$ et la longueur M$m = z$. Les trois surfaces orthogonales sont ici : le cylindre

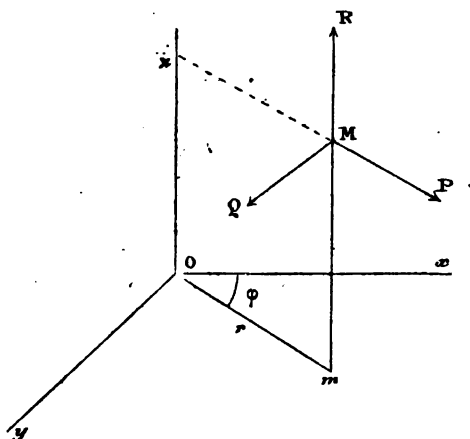


Fig. 20.

d'équation $r = C^{te}$, le plan MOz d'équation $\varphi = C^{te}$ et le plan perpendiculaire à Oz d'équation $z = C^{te}$. Les directions suivant lesquelles nous décomposerons la vitesse seront les tangentes aux lignes d'intersection de ces trois surfaces deux à deux, c'est-à-dire les directions : MP, perpendiculaire à Oz, prise à l'opposé de l'axe, de façon que r soit croissant pour un petit déplacement ; MQ, perpendiculaire à MOz, prise dans le sens où φ augmente, enfin MR parallèle à Oz. Concevons un déplacement MM′ du mobile correspondant à un intervalle Δt. Les projections de MM′ suivant MP, MQ, MR sont, en négligeant

des quantités infiniment petites d'ordre supérieur :

$$\Delta r \qquad r\Delta\varphi \qquad \Delta z$$

par suite on a :

$$(MM') = (\Delta r) + (r\Delta\varphi) + (\Delta z)$$

d'où l'on déduit, en divisant par Δt et passant à la limite :

$$(V) = \left(\frac{dr}{dt}\right) + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Ces composantes doivent être portées respectivement sur MP, MQ, MR ou à l'opposé, suivant que leurs expressions algébriques sont positives ou négatives.

2° En coordonnées polaires ou sphériques, on définit un point M (*fig.* 21) de projection m sur xOy par la distance $OM = \rho$, l'angle $MOz = \theta$ compté à partir de Oz, et l'angle $xOm = \varphi$ compté à partir de Ox. Les trois surfaces orthogonales sont ici : la sphère d'équation $\rho = C^{te}$, le cône d'équation $\theta = C^{te}$ et le plan MOz d'équation $\varphi = C^{te}$. Les tangentes aux courbes d'intersection des trois surfaces deux à deux sont MP, P étant à l'opposé de O, MQ pris dans le sens où θ augmente et MR pris dans le sens où φ augmente. Les projections d'un déplacement élémentaire MM' du mobile sur les

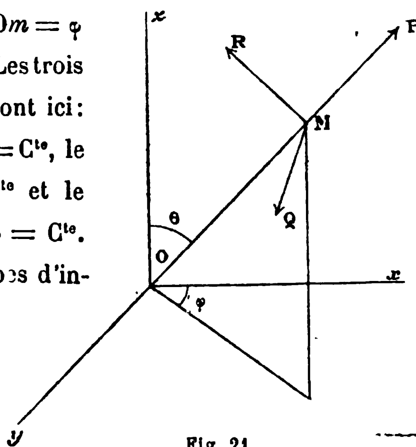


Fig. 21.

directions MP, MQ, MR sont :

$$\Delta\rho \qquad \rho\Delta\theta \qquad \rho \sin\theta \, \Delta\varphi$$

Or :

$$(MM') = (\Delta\rho) + (\rho\Delta\theta) + (\rho \sin\theta \, \Delta\varphi)$$

d'où, en divisant par Δt et passant à la limite :

$$(V) = \left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \left(\rho \frac{d\theta}{dt}\right) + \left(\rho \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\right)$$

26. Accélération. — Pour caractériser un mouvement, il est naturel de chercher à représenter la vitesse à un moment déterminé ; mais il est nécessaire aussi de connaître la variation de cette vitesse dans un intervalle de temps infiniment petit suivant l'époque considérée.

Cette notion est particulièrement simple dans un mouvement rectiligne. Supposons d'abord un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, c'est-à-dire tel que la vitesse s'accroisse de quantités égales dans des temps égaux. L'accélération, dans ce mouvement, sera, par définition, l'accroissement de la vitesse dans l'unité de temps, ou bien encore le rapport de l'accroissement de la vitesse dans un intervalle déterminé à cet intervalle. Si la vitesse ne s'accroît pas de quantités égales dans des temps égaux, on appellera accélération la dérivée $\frac{dv}{dt}$.

Pour représenter géométriquement l'accélération dans le mouvement rectiligne uniformément accéléré, on convient de la porter dans le sens du mouvement si la valeur absolue de la vitesse est croissante et dans le sens contraire si elle est dé-

croissante. Supposons maintenant un mouvement quelconque. Soit M (*fig.* 22) un point mobile dans l'espace. Si l'on mène à chaque instant par l'origine un segment OM' égal et parallèle à la vitesse du point M, on obtient un nouveau mobile, dont la vitesse sera, par définition, en grandeur, direction et sens, l'accélération du mobile M. Cette définition comprend comme cas particulier celle que nous avons donnée pour le mouvement rectiligne uniformément accéléré.

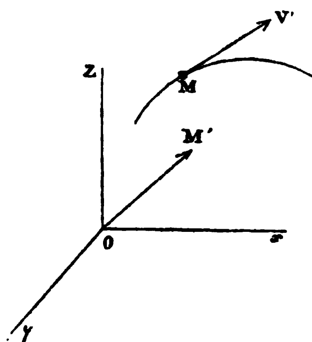


Fig. 22.

27. Projections de l'accélération sur les axes coordonnés.— Soient x,y,z les coordonnées du point M, celles de M' seront alors $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Par suite, les projections cherchées sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z}{dt^2}$$

Théorème. — Si on projette un mobile sur un axe fixe quelconque, l'accélération du mobile projection est à chaque instant égale à la projection sur le même axe de l'accélération du premier mobile.

En effet, prenons cet axe fixe pour axe des x. Alors x est le même pour les deux mobiles : $\frac{d^2x}{dt^2}$ représente la projection

sur Ox de l'accélération du premier mobile et aussi l'accélération du second, ce qui démontre le théorème.

Le théorème s'applique aux projections sur un plan quelconque. Prenons en effet ce plan pour plan des xy. Les coordonnées x et y du mobile projeté sont les mêmes à chaque instant pour le mobile projeté et pour le mobile de l'espace. Or l'accélération du premier mobile est :

$$(\Gamma) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

Celle du second :

$$(\gamma) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

et la deuxième grandeur géométrique est évidemment la projection de la première sur le plan des xy.

28. Composantes de l'accélération suivant la tangente et la normale principale à la trajectoire. — On peut chercher à représenter l'accélération d'une manière intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment de tout système de coordonnées. Il est nécessaire de rappeler quelques notions géométriques pour arriver à ce résultat.

Soit une courbe gauche C (*fig.* 23), trajectoire d'un mobile M, MT la tangente à cette courbe menée dans un sens déterminé. Par l'origine O des coordonnées menons à chaque instant une parallèle OM' à la tangente MT, M' désignant l'intersection de la droite OM' avec une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine. Quand M se déplace sur la courbe C, M' se déplace sur la sphère en décrivant une courbe C'. Soit M'T' la tangente à cette courbe menée dans le sens où elle est parcourue. La pa-

rallèle MN à M′T′ passant par M sera la normale principale à la courbe gauche C et le plan TMN le plan osculateur à cette même courbe. A un déplacement $MM_1 = \Delta s$ sur la courbe C correspond un déplacement $M'M'_1 = \Delta\sigma$ sur la courbe C′. Le rayon de courbure au point M est la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ quand Δs tend vers zéro. Cette définition est analogue à celle qui a été donnée pour les courbes planes : en effet $M'OM'_1$ est

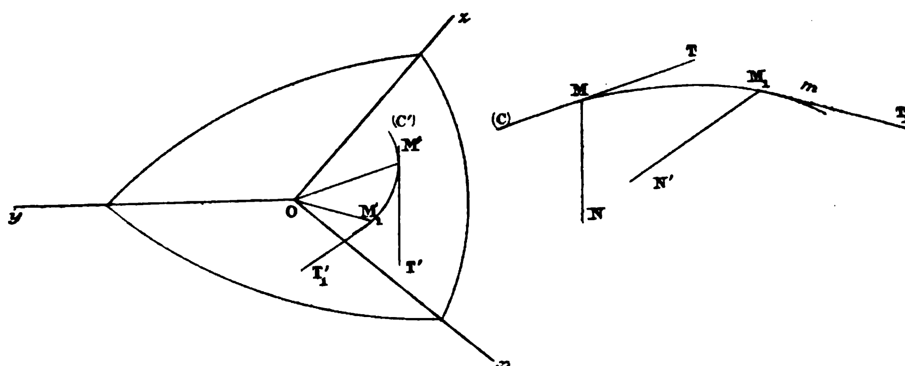


Fig. 23.

l'angle $\Delta\varepsilon$ de contingence de la courbe C et $M'M'_1$ diffère de $\Delta\varepsilon$ d'une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au prémier. Par suite limite $\frac{\Delta s}{\Delta\sigma}$ = limite $\frac{\Delta s}{\Delta\varepsilon}\cdot$ Ce rayon de courbure doit être porté sur la normale principale menée dans le sens que nous avons défini. Ce sens, indépendant de la direction adoptée pour le déplacement du mobile, est celui de la concavité de la courbe, et il est facile de justifier cette dénomination. En effet, la normale MN et l'arc de courbe MM_1 se trouvent du même côté par rapport à la tangente MT, puisque les deux droites OM'_1 et M′T′ sont d'un même côté par rapport à OM′.

29. Décomposition de l'accélération suivant la tangente et la normale principale. — Soient x, y, z les coordonnées du point M (*fig.* 23); α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente MT supposée menée dans le sens des arcs croissants. Ce sont en même temps les coordonnées du point M'. Désignons par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la tangente M'T' menée également dans le sens des arcs croissants; ils représentent aussi les cosinus directeurs de la normale principale à la courbe (C).

Considérons un déplacement infiniment petit ds sur la courbe (C) correspondant à un intervalle de temps dt, et soit $d\sigma$ l'arc de courbe (C') qui lui correspond. On a :

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \beta = \frac{dy}{ds} \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$\lambda = \frac{d\alpha}{ds} \qquad \mu = \frac{d\beta}{ds} \qquad \nu = \frac{d\gamma}{ds}$$

et $\frac{ds}{d\sigma} = R$, R désignant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

De la première équation on déduit :

$$dx = \alpha ds.$$

Par suite :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{ds}{dt}$$

Calculons

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt}\,\frac{d\alpha}{dt} = \alpha \frac{d^2s}{dt^2} + \lambda \frac{v^2}{R}$$

Par analogie :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \beta \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{v^2}{R} \mu$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{v^2}{R} \nu$$

L'interprétation géométrique de ces équations donne la décomposition de l'accélération suivant la tangente et la normale principale. En effet, supposons qu'on porte sur la tangente, dans le sens des arcs croissants, un segment égal à $\frac{d^2s}{dt^2}$ et sur la normale principale, du côté de la concavité, un segment égal à $\frac{v^2}{R}$. Les équations précédentes expriment que la résultante de ces deux segments a pour projections sur les axes coordonnés $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$. Donc :

$$(\gamma) = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) + \left(\frac{v^2}{R}\right)$$

Supposons que la vitesse soit dirigée du côté des arcs croissants et soit en même temps croissante en valeur absolue. Ces hypothèses se traduisent par les inégalités $\frac{ds}{dt} > 0, \frac{d^2s}{dt^2} > 0$. Alors la composante tangentielle de l'accélération a pour cosinus directeurs α, β, γ ; elle doit donc être portée dans le sens du mouvement. Supposons que la vitesse soit dirigée du côté des arcs décroissants et la vitesse croissante en valeur absolue. Les inégalités $\frac{ds}{dt} < 0, \frac{d^2s}{dt^2} < 0$ traduisent ces hypothèses. La direction de la composante tangentielle est encore

celle du mouvement. Donc, toutes les fois que la vitesse est croissante, la composante tangentielle de l'accélération est dirigée dans le sens du mouvement. Le contraire a lieu si la vitesse est décroissante.

La composante normale de l'accélération disparaît quand le point M passe par un point d'inflexion de la courbe, et en même temps, le sens de cette composante devient indéterminé, car la tangente traverse la courbe.

Théorème. — Si un mobile parcourt sa trajectoire avec une vitesse constante, l'accélération du mobile est constamment normale.

En effet :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 0$$

L'accélération se réduit donc à sa composante normale.

Réciproquement, si un mobile parcourt sa trajectoire avec une accélération constamment normale, il a une vitesse constante.

En effet, $\frac{dv}{dt}$ étant nulle, on en déduit $v = C^{te}$.

On peut retrouver les résultats précédents par des considérations géométriques.

Considérons un point mobile M (*fig.* 24) décrivant la courbe (C) et portons sur la tangente MV un segment égal à la vitesse. Soit M' la position de M à l'instant $t + \Delta t$; figurons la vitesse de M' par le segment M'V'.

Pour représenter l'accroissement géométrique de la vitesse, portons sur une parallèle à M'V' menée par M un segment MV_1 égal à M'V'; VV_1 sera cet accroissement.

Par définition, l'accélération est la limite du rapport $\left(\frac{VV_1}{\Delta t}\right)$

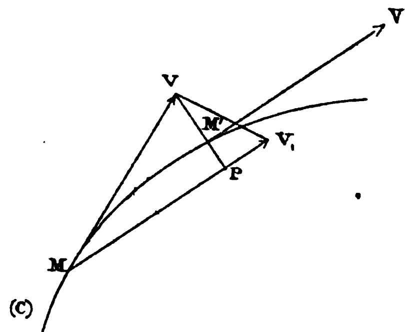


Fig. 24.

quand Δt tend vers 0. Or, si nous abaissons VP perpendiculaire sur MV_1,

$$(VV_1) = (VP) + (PV_1)$$

D'où :

$$\left(\frac{VV_1}{\Delta t}\right) = \left(\frac{VP}{\Delta t}\right) + \left(\frac{PV_1}{\Delta t}\right)$$

Or $VP = V \sin \Delta\varepsilon$, $\Delta\varepsilon$ étant l'angle de contingence de la courbe (C). Par suite :

$$\text{limite}\left(\frac{VP}{\Delta t}\right) = V\frac{d\varepsilon}{dt} = V\frac{d\varepsilon}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{V^2}{R}.$$

La direction limite sur laquelle on devra porter le segment $\frac{V^2}{R}$ sera celle d'une perpendiculaire à MV située dans le plan osculateur à la courbe ; c'est donc la normale principale, et on peut remarquer qu'elle est dirigée du côté où se trouve l'arc de courbe par rapport à la tangente en M.

Cherchons maintenant à quoi est égal limite $\frac{PV}{\Delta t}$;

$$PV = \Delta V + V(1 - \cos \Delta \varepsilon)$$

et, comme $1 - \cos \Delta \varepsilon$ est un infiniment petit du second ordre, si $\Delta \varepsilon$ est du premier,

$$\text{limite} \frac{PV}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Quant au sens de cette composante, si la vitesse est croissante en valeur absolue, PV_1 a pour direction limite la tangente menée dans le sens du mouvement ; si la vitesse est décroissante, la direction de la composante tangentielle est opposée à celle du mouvement.

30. Décomposition de l'accélération suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur. —

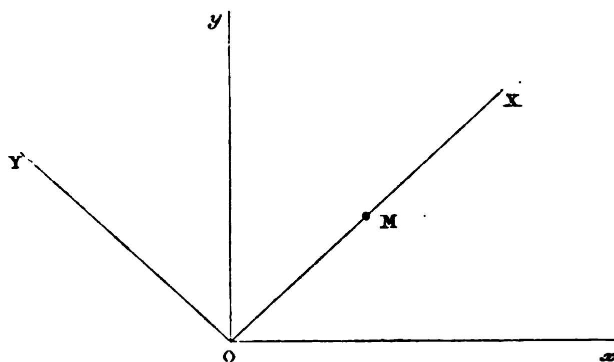


Fig 25.

Proposons-nous de décomposer l'accélération d'un point mobile dans un plan suivant deux droites OX et OY (*fig.* 25), la

première coïncidant avec le rayon vecteur, la seconde menée perpendiculairement au rayon vecteur, du côté où l'angle polaire augmente. Nous désignerons par (OX) et (OY) les composantes suivant ces directions. Les composantes de l'accélération suivant les axes étant $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$, on a, θ désignant l'angle du rayon vecteur OM avec Ox:

$$(OX) = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta$$

$$(OY) = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta$$

Cherchons à exprimer le second membre au moyen des coordonnées polaires du mobile. A cet effet, reportons-nous aux composantes de la vitesse suivant les axes, le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur (**24**); nous aurons :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\theta + \frac{dy}{dt}\sin\theta$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = -\frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta$$

Si on différentie ces équations par rapport au temps, on a:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (OX) - \frac{dx}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{dy}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = (OX) + r\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = (OY) - \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Par suite :

$$(OX) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$(OY) = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

Supposons un mouvement circulaire ; le centre du cercle coïncidant avec le pôle, son équation est $r = C^{te}$. Les deux composantes de l'accélération deviennent alors :

$$(OX) = -r\omega^2$$

$$(OY) = r\frac{d\omega}{dt}.$$

On aurait pu obtenir ces formules comme cas particulier des formules de l'accélération décomposée suivant la tangente et la normale principale (**29**). En effet, dans le cas d'un mouvement circulaire, la normale principale n'est autre chose que le rayon vecteur

$$\frac{V^2}{R} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

et le sens de cette composante est la direction qui va du point mobile au pôle, c'est ce qu'indiquait le signe moins dans la formule précédente. La composante tangentielle est $\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$.

31. Loi des aires. — La composante (OY) de l'accélération, perpendiculaire au rayon vecteur (**30**), disparaît si l'on a :

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C,$$

C désignant une quantité constante. Dans ce cas, l'accélération est centrale et sa valeur est :

$$\gamma = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

L'aire MOM_0 (*fig.* 26) décrite par le rayon vecteur varie alors proportionnellement au temps, et l'on dit que le mouvement s'effectue suivant la *loi des aires*.

Soit en effet l'accroissement $\Delta A = MOM'$ de l'aire $A = MOM_0$, correspondant à l'intervalle Δt. Si l'on décrit de O comme centre l'arc de cercle MM_1, l'aire du secteur circulaire MOM_1, dont l'angle au centre est l'accroissement $\Delta\theta$ de l'angle polaire, a pour valeur :

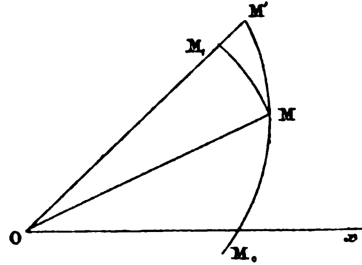


Fig. 26.

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

Or, l'aire MM_1M' est un infiniment petit du second ordre, si l'on prend l'aire MOM' comme infiniment petit du premier ordre. On peut donc écrire l'égalité :

$$\lim \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2}$$

$$A = \frac{C}{2} t + A_0$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

32. Expressions indépendantes du temps pour la vitesse et l'accélération dans un mouvement s'effectuant suivant la loi des aires. — On obtient l'expression de l'accélération en éliminant t entre les deux équations (**31**) :

$$\gamma = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C$$

On a successivement :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{C}{r^2} = -C\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -C\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\cdot\frac{C}{r^2} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}$$

On en déduit la formule cherchée :

$$\gamma = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right)$$

La parenthèse est positive ou négative suivant que la trajectoire tourne sa concavité ou sa convexité vers le pôle. Dans le premier cas, l'accélération est dirigée vers le pôle ; dans le second, elle est en sens contraire. Si la parenthèse s'annule, la trajectoire présente un point d'inflexion et l'accélération change de sens. Le rayon vecteur tourne d'ailleurs toujours dans le même sens puisque l'aire décrite varie proportionnellement au temps.

Quant à la formule générale de la vitesse :

$$v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2}$$

elle devient, dans le mouvement considéré :

$$v^2 = C^2 \left[\left(\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]$$

33. Expression de la loi des aires en coordonnées rectilignes. — Les formules de transformation sont :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

On en déduit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}$$

et

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$$

La loi des aires s'exprime donc par l'égalité :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C,$$

C désignant la même constante que précédemment.

34. Application. — Calculer l'accélération d'un mobile parcourant une ellipse d'un mouvement tel que le rayon qui va du centre au point mobile décrive des aires proportionnelles aux temps.

L'ellipse étant rapportée à ses axes, dont les longueurs sont

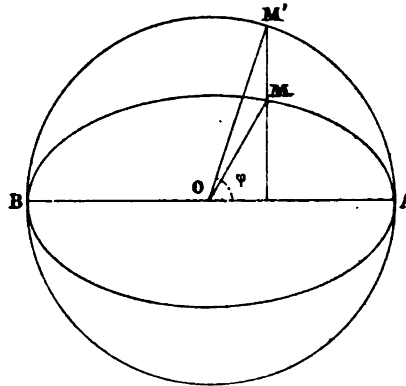


Fig. 27.

désignées par a et b, les expressions des coordonnées x, y du mobile M (*fig.* 27), en fonction de l'anomalie excentrique φ, sont :

$$x = a \cos \varphi$$
$$y = b \sin \varphi$$

Ces coordonnées satisfont à l'équation des aires :

$$(1) \qquad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C$$

qui permet d'exprimer φ en fonction de t. On a en effet :

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = b \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

et l'équation (1) s'écrit :

$$ab \frac{d\varphi}{dt} = C$$

d'où l'on déduit :

$$\varphi = Kt$$

K désignant une constante; φ varie donc proportionnellement au temps et le point M' correspondant de M décrit d'un mouvement uniforme le cercle principal.

Les coordonnées x, y ont pour valeurs en fonction du temps :

$$x = a \cos Kt$$

$$y = b \sin Kt$$

et les composantes suivant les axes de l'accélération sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - aK^2 \cos Kt = - K^2x = - K^2r \frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - bK^2 \sin Kt = - K^2y = - K^2r \frac{y}{r}$$

en appelant r le rayon vecteur OM. L'accélération est donc égale en valeur absolue à K^2r : elle varie proportionnellement à la distance du mobile au centre de l'ellipse et reste constamment dirigée vers ce centre.

35. Application au mouvement des planètes. — Ainsi que Kepler l'a constaté le premier, les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe un des foyers et de telle manière que les rayons vecteurs allant du soleil à chaque planète décrivent des aires proportionnelles aux temps. Leur mouvement est donc soumis à la loi des aires et l'on pourra cal-

culer par les formules précédentes leur vitesse et leur accélération.

Soit :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \tag{2}$$

l'équation de l'ellipse trajectoire d'une planète quelconque, l'axe polaire étant la ligne qui joint le foyer au sommet le plus voisin, p désignant le paramètre $\frac{b^2}{a}$ de l'ellipse dont les axes sont a et b, e représentant l'excentricité $\frac{c}{a}$.

On déduit de l'équation (2) :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$$

$$\frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} = - \frac{e \sin \theta}{p}$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = - \frac{e \cos \theta}{p}$$

La formule générale (**32**) donne alors pour valeur de l'accélération :

$$\gamma = - \frac{C^2}{pr^2},$$

C désignant la constante des aires. L'accélération est donc dirigée vers le soleil ; elle est inversement proportionnelle au carré de la distance de la planète au soleil. La troisième loi de Kepler consiste en ce que la quantité $\frac{C^2}{p}$ est à peu près la même pour toutes les planètes.

L'expression de la vitesse (**32**) prend ici la valeur :

$$v^2 = C^2 \left(\frac{e^2 \sin^2\theta}{p^2} + \frac{1 + 2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}{p^2}\right)$$

d'où l'on déduit :

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2}(e^2 + 2e\cos\theta + 1) = \frac{C^2}{p}\left[\frac{2(1 + e\cos\theta)}{p} + \frac{e^2 - 1}{p}\right]$$

Or, on sait que le paramètre p satisfait à la relation :

$$p = a(1 - e^2)$$

On a par suite :

$$v^2 = \frac{C^2}{p}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Le carré de la vitesse se compose donc d'une partie constante et d'une partie variable, qui varie en raison inverse de la distance de la planète au soleil. Si l'orbite est parabolique, comme cela a lieu pour la plupart des comètes, a est infini et la vitesse varie en raison inverse de la racine carrée de la distance de l'astre au soleil.

Théorème. — Si l'accélération d'un mobile est centrale, sa trajectoire est plane, quelles que soient les conditions initiales.

En effet, si l'on considère le plan passant par le centre des accélérations et par la vitesse initiale, l'accélération au bout du temps dt est dans ce plan ; par suite, l'accroissement géométrique de la vitesse s'y trouve aussi. Donc le mobile ne sera pas sorti du plan.

Réciproquement, si la trajectoire d'un mobile est plane, quelles que soient les conditions initiales, l'accélération est centrale.

Il faut, pour l'exactitude du théorème, supposer que la trajectoire est déterminée quand on donne les conditions initiales du mouvement et que l'accélération ne dépend que de la situation du mobile.

Pour démontrer cette réciproque, nous établirons d'abord le lemme suivant.

35. Lemme. — La condition nécessaire et suffisante pour que la trajectoire d'un mobile soit plane est que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

soit nul identiquement, $x'\, y'\, z'$, $x''\, y''\, z''$, $x'''\, y'''\, z'''$ désignant les dérivées de x, y, z par rapport au temps.

La condition est nécessaire. En effet, la trajectoire étant plane, les coordonnées x, y, z du mobile sont liées par la relation

$$x = \lambda y + \mu z + \nu$$

λ, μ, ν désignant des constantes. On en déduit en différentiant

$$\begin{aligned} x' &= \lambda y' + \mu z' \\ x'' &= \lambda y'' + \mu z'' \\ x''' &= \lambda y''' + \mu z'''. \end{aligned}$$

Ces trois équations doivent être vérifiées pendant toute la durée du mouvement par un même système de valeurs de λ

et μ, ce qui exige que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

soit nul.

La condition est suffisante. En effet, lorsqu'un déterminant est nul, il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments de chacune des lignes ou des colonnes. Par suite, Δ étant nul, on a :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = \lambda y' + \mu z' \\ x'' = \lambda y'' + \mu z'' \\ x''' = \lambda y''' + \mu z''' \end{array} \right.$$

où λ et μ représentent des fonctions du temps. En différentiant la première de ces équations par rapport au temps et en tenant compte de la seconde, on trouve :

$$\lambda' y' + \mu' z' = 0$$

de même on déduit de la seconde :

$$\lambda' y'' + \mu' x'' = 0$$

Ces deux dernières équations homogènes par rapport à λ' et μ' peuvent être satisfaites de deux manières.

1° $y' z'' - z' y'' \neq 0$. Alors $\lambda' = \mu' = 0$; par suite λ et μ' sont constants pendant toute la durée du mouvement, et la première équation (1) intégrée donne :

$$x = \lambda y + \mu z + \nu,$$

ce qui exprime que le mobile se déplace dans un plan.

2° $y'z'' - z'y'' = 0$. On en déduit :

$$\frac{z''}{z'} = \frac{y''}{y'}$$

En intégrant deux fois de suite, on obtient :

$$z = Cy + D$$

équation qui montre que la trajectoire est contenue dans un plan parallèle à Ox.

Réciproque. — Posons $x''=X$, $y''=Y$, $z''=Z$; X,Y,Z dépendant du temps par l'intermédiaire de x,y,z, on pourra écrire :

$$x''' = \frac{\partial X}{\partial x}x' + \frac{\partial X}{\partial y}y' + \frac{\partial X}{\partial z}z'$$

$$y''' = \frac{\partial Y}{\partial x}x' + \frac{\partial Y}{\partial y}y' + \frac{\partial Y}{\partial z}z'$$

$$z''' = \frac{\partial Z}{\partial x}x' + \frac{\partial Z}{\partial y}y' + \frac{\partial Z}{\partial z}z'$$

La trajectoire du mobile étant plane, quelles que soient les conditions initiales, on a, d'après le lemme précédent :

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial x}x' + \frac{\partial X}{\partial y}y' + \frac{\partial X}{\partial z}z' & \frac{\partial Y}{\partial x}x' + \frac{\partial Y}{\partial y}y' + \frac{\partial Y}{\partial z}z' & \frac{\partial Z}{\partial x}x' + \frac{\partial Z}{\partial y}y' + \frac{\partial Z}{\partial z}z' \end{vmatrix} = 0$$

Ce déterminant est une fonction homogène du second degré en x', y', z' qui doit être nulle identiquement. L'équation précédente se décompose donc en plusieurs autres obtenues en égalant à zéro les coefficients de x'^2, y'^2, z'^2, $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$.

La première de ces équations est :

$$Y \frac{\partial Z}{\partial x} - Z \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{Z}\right) = 0$$

$\frac{Y}{Z}$ est donc indépendant de x et peut s'écrire :

$$\frac{Y}{Z} = f_1(y,z).$$

Par analogie, on a, en annulant les coefficients de y'^2, z'^2 :

$$\frac{Z}{X} = f_2(z,x)$$

$$\frac{X}{Y} = f_3(x,y)$$

et les trois fonctions f_1, f_2, f_3 sont liées par la relation :

$$f_1(y,z)\, f_2(z,x)\, f_3(x,y) = 1$$

On en déduit :

$$f_1(y,z) = \frac{\frac{1}{f_3(x,y)}}{f_2(z,x)}$$

le premier membre étant indépendant de x, il faut que dans le second x disparaisse dans la division ; on peut donc poser :

$$f_1(y,z) = \frac{\varphi_1(y)}{\psi_1(z)} = \frac{Y}{Z}$$

de même:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_2(z)}{\psi_2(x)} &= \frac{Z}{X} \\ \frac{\varphi_3(x)}{\psi_3(y)} &= \frac{X}{Y} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

et l'on a, entre les fonctions φ et ψ, la relation :

$$\varphi_1(y)\,\varphi_2(z)\,\varphi_3(x) = \psi_1(z)\,\psi_2(x)\,\psi_3(y)$$

Pour qu'une pareille équation ait lieu identiquement, il est nécessaire que les termes dépendant d'une même variable soient proportionnels. Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= C_1\varphi_2(z) \\ \psi_2(x) &= C_2\varphi_3(x) \\ \psi_3(y) &= C_3\varphi_1(y) \end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes.

En vertu des équations (α) et des précédentes, on a enfin :

$$\frac{X}{\varphi_3(x)} = \frac{Y}{\psi_3(y)} = \frac{Y}{C_3\varphi_1(y)}$$

$$\frac{Y}{C_3\varphi_1(y)} = \frac{Z}{C_3\psi_1(z)} = \frac{Z}{C_1C_3\varphi_2(z)}$$

d'où :

$$\frac{X}{\varphi_3(x)} = \frac{Y}{C_3\varphi_1(y)} = \frac{Z}{C_1C_3\varphi_2(z)}$$

ou, pour plus de symétrie :

$$\frac{X}{\chi_1(x)} = \frac{Y}{\chi_2(y)} = \frac{Z}{\chi_3(z)} = u \qquad (\beta)$$

Nous pourrons déterminer ces trois fonctions $\chi_1\chi_2\chi_3$ en annulant les coefficients de $x'y'$, $y'z'$, $z'x'$. La première équation ainsi obtenue est :

$$Y\frac{\partial Z}{\partial y} + Z\frac{\partial Z}{\partial x} - Z\frac{\partial Y}{\partial y} - X\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

qui s'écrit, en tenant compte des relations (β) et effectuant les

réductions :

$$u^2\chi_3(z)\,[\chi_1'(x)-\chi_2'(y)]=0$$

Or u n'est pas nul, sans quoi l'accélération serait constamment nulle ; $\chi_3(z)$ peut être supposé aussi différent de zéro, car s'il était nul, Z serait nul, et l'accélération serait parallèle au plan des xy, qu'on peut toujours choisir de façon qu'il n'en soit pas ainsi. On a donc :

$$\chi_1'(x)=\chi_2'(y);$$

en annulant les deux autres coefficients on a de même :

$$\chi_1'(x)=\chi_3'(z)$$
$$\chi_2'(y)=\chi_3'(z)$$

par suite :

$$\chi_1'(x)=\chi_2'(y)=\chi_3'(z)$$

et ces égalités exigent que l'on ait :

$$\chi_1'(x)=A$$
$$\chi_2'(y)=A$$
$$\chi_3'(z)=A$$

A désignant une constante. D'où, en intégrant :

$$\chi_1(x)=A(x-a)$$
$$\chi_2(y)=A(y-b)$$
$$\chi_3(z)=A(z-c)$$

a,b,c désignant des constantes. Les relations (β) s'écrivent alors :

$$\frac{X}{x-a}=\frac{Y}{y-b}=\frac{Z}{z-c}$$

Elles expriment que les projections de l'accélération sur les axes sont proportionnelles aux projections du segment qui joint le point de coordonnées x,y,z au point de coordonnées a,b,c; et, comme a,b,c sont des constantes, l'accélération passe bien par un point fixe.

36. Accélération centrale d'un mobile décrivant une conique. — La recherche de cette accélération est un problème qui se présente en astronomie dans la théorie des étoiles doubles. Avant de le traiter, nous établirons un lemme.

Lemme. Équation différentielle des coniques situées dans un plan. — L'équation de la famille de ces coniques est

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Elle renferme cinq paramètres; en la différentiant cinq fois on obtient les cinq équations suivantes, où les accents désignent les dérivées par rapport à x qui est prise comme variable indépendante :

$$\begin{aligned}
&cyy' + b(xy' + y) + ey' + ax + d = 0 \\
&c(yy'' + y'^2) + b(xy'' + 2y') + ey'' + a = 0 \\
&c(yy''' + 3y'y'') + b(xy''' + 3y'') + ey''' = 0 \\
&c(yy^{\text{IV}} + 4y'y''' + 3y''^2) + b(xy^{\text{IV}} + 4y''') + ey^{\text{IV}} = 0 \\
&c(yy^{\text{V}} + 5y'y^{\text{IV}} + 10y''y''') + b(xy^{\text{V}} + 5y^{\text{IV}}) + ey^{\text{V}} = 0
\end{aligned}$$

L'élimination de b,c,e entre les trois dernières équations, donne l'équation différentielle cherchée :

$$\begin{vmatrix}
yy''' + 3y'y'' & xy''' + 3y'' & y''' \\
yy^{\text{IV}} + 4y'y''' + 3y''^2 & xy^{\text{IV}} + 4y''' & y^{\text{IV}} \\
yy^{\text{V}} + 5y'y^{\text{IV}} + 10y''y''' & xy^{\text{V}} + 5y^{\text{IV}} & y^{\text{V}}
\end{vmatrix} = 0$$

ou, en simplifiant :

$$y'' \begin{vmatrix} 0 & 3y'' & y''' \\ 3y'' & 4y''' & y^{\text{iv}} \\ 10y''' & 5y^{\text{iv}} & y^{\text{v}} \end{vmatrix} = 0$$

ou enfin, en développant le déterminant et revenant aux notations habituelles :

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{d^5y}{dx^5} - 45\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0$$

37. Problème. — Revenons au problème proposé : trouver l'accélération d'un mobile, sachant qu'il décrit une conique, quelles que soient les conditions initiales.

Le théorème précédent montre que l'accélération est toujours dirigée vers un point fixe.

En prenant pour origine le centre des accélérations, on peut poser :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ux$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = uy$$

u étant une fonction inconnue de x et de y qu'on va déterminer.

L'accélération étant centrale, on a, en désignant maintenant par des lettres accentuées les dérivées par rapport au temps, la relation suivante :

$$x'y - y'x = C^{\text{te}}$$

Le calcul des cinq premières dérivées de y par rapport à x

donnera, en tenant compte de l'égalité précédente, les cinq équations suivantes :

$$x'\frac{dy}{dx} = y'$$

$$x'^3\frac{d^2y}{dx^2} = (x'y - y'x)\,u$$

$$x'^5\frac{d^3y}{dx^3} = (x'y - y'x)\left(x'\frac{du}{dt} - 3u^2x\right)$$

$$x'^7\frac{d^4y}{dx^4} = (x'y - y'x)\left(x'^2\frac{d^2u}{dt^2} - 10uxx'\frac{du}{dt} - 3u^2x'^2 + 15u^3x^2\right)$$

$$x'^9\frac{d^5y}{dx^5} = (x'y - y'x)\left(x'^3\frac{d^3u}{dt^3} - 15uxx'^2\frac{d^2u}{dt^2} - 10xx'^2\frac{du^2}{dt^2}\right.$$
$$\left. + 105u^2x^2x'\frac{du}{dt} - 16ux'^3\frac{du}{dt} + 45u^3xx'^2 - 105u^4x^3\right)$$

Substituons les valeurs des dérivées successives de y par rapport à x dans l'équation différentielle de la trajectoire. Nous obtiendrons en effectuant les produits indiqués :

$$9u^2x'^3\frac{d^3u}{dt^3} \begin{array}{r} +135 \\ -135 \\ \\ \\ \end{array}\Bigg|\, u^3xx'^2\frac{d^2u}{dt^2} \begin{array}{r} +945 \\ -1350 \\ +1080 \\ -675 \end{array}\Bigg|\, u^4x^2x'\frac{du}{dt} \begin{array}{r} -144 \\ +135 \\ \\ \\ \end{array}\Bigg|\, u^3x'^3\frac{du}{dt} \begin{array}{r} +405 \\ -405 \\ \\ \\ \end{array}\Bigg|\, u^5xx'^2 \begin{array}{r} -945 \\ +2025 \\ -1080 \\ \\ \end{array}\Bigg|\, u^6x^3$$

$$-45ux'^3\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2} \begin{array}{r} +450 \\ -360 \\ -90 \end{array}\Bigg|\, u^2xx'^2\frac{du^2}{dt^2} + 40x'^3\frac{du^3}{dt^3} = 0$$

Ou bien encore, en supprimant le facteur x'^3 commun à tous

les termes qui ne se détruisent pas :

$$9u^2\frac{d^3u}{dt^3} - 9u^3\frac{du}{dt} - 45u\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2} + 40\frac{du^3}{dt^3} = 0$$

Cette équation fera connaître u en fonction du temps si on sait l'intégrer. A cet effet, posons $u = v^p$, v étant la nouvelle variable, p un exposant numérique que nous choisirons de manière à simplifier le plus possible l'équation. On a, en différentiant :

$$\frac{du}{dt} = pv^{p-1}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = pv^{p-1}\frac{d^2v}{dt^2} + p(p-1)v^{p-2}\frac{dv^2}{dt^2}$$

$$\frac{d^3u}{dt^3} = pv^{p-1}\frac{d^3v}{dt^3} + 3p(p-1)v^{p-2}\frac{dv}{dt}\frac{d^2v}{dt^2} + p(p-1)(p-2)v^{p-3}\frac{dv^3}{dt^3}$$

Faisons la substitution dans l'équation précédente, il vient :

$$9pv^{3p-1}\frac{d^3v}{dt^3} \left.\begin{array}{l} +27(p-1)p \\ -45p^2 \end{array}\right| v^{3p-2}\frac{dv}{dt}\frac{d^2v}{dt^2} \left.\begin{array}{l} +9p(p-1)(p-2) \\ -45p^2(p-1) \\ +40p^3 \end{array}\right| v^{3p-3}\frac{dv^3}{dt^3} - 9pv^{4p-1}\frac{dv}{dt} = 0$$

Si nous choisissons p de façon à annuler le terme en

$$\frac{dv}{dt}\frac{dv^2}{dt^2}$$

c'est-à-dire tel que

$$3(p-1) = 5p$$

ou

$$p = -\frac{3}{2}$$

le terme suivant disparaît aussi et l'équation se réduit à :

$$\frac{d^3v}{dt^3} = v^{-\frac{3}{2}} \frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

Notre but est d'obtenir l'accélération en fonction des variables x et y coordonnées du mobile. Or

$$x'' = \frac{dx'}{dt} = v^{-\frac{3}{2}} x$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = v^{-\frac{3}{2}} y$$

et v est une fonction dépendant du temps par l'intermédiaire de x et de y seulement. Donc :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = x'^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2x'y' \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v^{-\frac{3}{2}} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} = x'^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 3x'^2 y' \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 3x'y'^2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} + y'^3 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$$

$$+ 2v^{-\frac{3}{2}} \left\{ xx' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (xy' + yx') \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + yy' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\}$$

$$+ v^{-\frac{3}{2}} \left(xx' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (yx' + xy') \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + yy' \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$+ v^{-\frac{3}{2}} \left(x' \frac{\partial v}{\partial x} + y' \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{3}{2} v^{-\frac{5}{2}} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(x' \frac{\partial v}{\partial x} + y' \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

L'équation (1) devient alors :

$$x'^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 3x'^2 y' \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 3x'y'^2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} + y'^3 \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}$$

$$+ \frac{3}{2} v^{-\frac{5}{2}} x' \left[2v \left(y \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

$$+ \frac{3}{2} v^{-\frac{5}{2}} y' \left[2v \left(x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = 0$$

Cette équation doit avoir lieu pendant toute la durée du mouvement. Elle a donc lieu au point de départ et quelles que soient les composantes de la vitesse initiale, c'est-à-dire quelles que soient x', y'. Donc :

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = 0$$

$$2v \left(x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$2v \left(x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial v}{\partial y}\left(x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{dv}{\partial y}\right) = 0$$

Les premières équations montrent que v est un polynome en x et y du second degré. Par suite :

$$v = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

Voyons d'après cela ce que nous apprennent les deux autres équations, sachant que :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} = ax + by + d$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} = bx + cy + e$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = b$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = c$$

$$v\,(ax + by) - (ax + by + d)\,(ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey) = 0$$
$$v\,(bx + cy) - (bx + cy + e)\,(ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey) = 0$$

ou encore :

$$(ax + by)(dx + ey + f) - d(ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey) = 0$$
$$(bx + cy)\,(dx + ey + f) - e(ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey) = 0.$$

Ces deux équations doivent être vérifiées quelles que soient x et y, donc :

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} af - d^2 = 0 \\ cf - e^2 = 0 \\ bf - de = 0 \end{cases}$$

$$(\beta) \qquad \begin{cases} be - cd = 0 \\ bd - ae = 0 \end{cases}$$

Je dis que les équations (β) sont en général conséquences des équations (α). En effet, si on multiplie la première par e, la troisième par $-d$ et qu'on ajoute, on obtient :

$$f(ae - bd) = 0$$

par suite si $f \neq 0$

$$ae - bd = 0$$

De même, en multipliant la deuxième des équations(α)par d, la troisième par $-e$ et ajoutant, on a :

$$f(cd - be) = 0$$

si donc $f \neq 0$

$$cd - bé = 0$$

Il y a donc deux cas à distinguer :

1° $f \neq 0$; les équations (α) donnent :

$$a = \frac{d^2}{f} \qquad b = \frac{de}{f} \qquad c = \frac{e^2}{f}.$$

Alors :

$$v = \frac{1}{f}(d^2x^2 + 2dexy + e^2y^2 + 2dfx + 2efy + f^2)$$

$$v = \frac{1}{f}(dx + ey + f)^2$$

L'accélération est donc, en posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\gamma = \frac{f^{-\frac{3}{2}} r}{(dx + ey + f)^3}$$

Si on suppose $d = e = 0$, γ devient proportionnel à r. C'est un cas particulier que nous avons rencontré précédemment.

2° $f = 0$. Les équations (α) et (β) donnent alors :

$$d = 0 \qquad e = 0$$

Il en résulte :

$$v = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$\gamma = \frac{r}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si $b = 0$, $a = c$

$$\gamma = \frac{\omega}{r^2}$$

l'accélération est donc inversement proportionnelle au carré de la distance.

Les deux hypothèses particulières que nous avons faites sont les seules pour lesquelles l'angle polaire disparaît.

Il est naturel de supposer que l'accélération dans le mouvement relatif de deux corps célestes ne dépend que de la distance. Pour les étoiles doubles, la loi $\gamma = Kr$ est invraisemblable, car l'accélération grandirait indéfiniment avec la distance. Il y a donc lieu de penser que c'est la loi $\gamma = \frac{\omega}{r^2}$ qui régit les mouvements des étoiles doubles.

CHAPITRE III

MOUVEMENTS RELATIFS. — COMPOSITION DES VITESSES

38. Trajectoires absolue et apparente dans le mouvement relatif. — On peut, comme nous l'avons vu, rapporter le mouvement d'un point à des axes mobiles ; les formules de transformation de coordonnées permettent alors de trouver les équations des trajectoires absolue et apparente.

Soient ox, oy, oz un système d'axes fixes ; OX, OY, OZ un système d'axes mobiles faisant avec les précédents des angles dont les cosinus sont contenus dans le tableau suivant :

	ox	oy	oz
OX	α	β	γ
OY	α'	β'	γ'
OZ	α''	β''	γ''

Les formules de transformation sont, en appelant a, b, c, les

coordonnées de O dans le système *oxyz :*

$$
(1) \qquad \begin{cases} x = a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y = b + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z = c + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{cases}
$$

1. Si l'on considère un point lié aux axes mobiles, X, Y, Z sont des constantes; le mouvement des axes mobiles étant connu, c'est-à-dire a, b, c, α, β, γ,..... étant donnés en fonction du temps t, l'élimination de t entre les équations (5) donne deux nouvelles équations :

$$
(2) \qquad \begin{cases} f(x,y,z,X,Y,Z) = 0 \\ \varphi(x,y,z,X,Y,Z) = 0 \end{cases}
$$

qui définissent la *trajectoire absolue.*

2. En regardant x, y, z comme des constantes, X, Y, Z comme coordonnées courantes, les équations (2) représentent la *trajectoire apparente*, rapportée aux axes mobiles du point fixe de coordonnées x, y, z.

3. Un autre point de vue consiste à traiter X, Y, Z comme des fonctions connues du temps, x, y, z comme des coordonnées courantes. Les équations (1) définissent alors la *trajectoire absolue* d'un point dont le mouvement est connu par rapport aux axes mobiles.

4. Enfin, si l'on considère x, y, z comme des fonctions connues du temps, X, Y, Z comme des coordonnées courantes, ces mêmes équations (1), résolues par rapport à X, Y, Z, déterminent la *trajectoire apparente*, la trajectoire absolue étant donnée.

39. Composition des vitesses.— Dans un tel mouvement,

la vitesse du mobile peut être considérée comme la résultante de deux autres.

En différentiant les équations (1), on a :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt} + \left(\alpha\frac{dX}{dt} + \alpha'\frac{dY}{dt} + \alpha''\frac{dZ}{dt}\right)\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{db}{dt} + X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt} + \left(\beta\frac{dX}{dt} + \beta'\frac{dY}{dt} + \beta''\frac{dZ}{dt}\right)\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{dc}{dt} + X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt} + \left(\gamma\frac{dX}{dt} + \gamma'\frac{dY}{dt} + \gamma''\frac{dZ}{dt}\right)
\end{aligned}\right.$$

La partie des seconds membres qui n'est pas entre parenthèses est la même que si X, Y, Z étaient des quantités constantes ; donc la vitesse absolue V_a se compose d'une première partie V_e, appelée *vitesse d'entraînement*, qui est égale à la vitesse à l'instant considéré du point du système mobile coïncidant avec le point mobile. Les parties entre parenthèses des seconds membres représentent les projections sur Ox, Oy, Oz du segment V_r ayant pour composantes $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ suivant OX, OY, OZ. Ce segment représente la *vitesse relative* du mobile, et l'on a la relation :

$$(V_a) = (V_e) + (V_r)$$

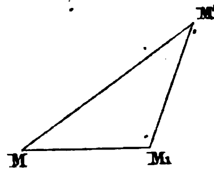


Fig. 28.

On peut arriver au même résultat par des considérations géométriques. Soient M,M' les positions d'un point du système aux époques t et $t + \Delta t$, M_1 la position à l'époque t du point du système mobile qui coïncide avec le point M' à l'époque $t + \Delta t$ (*fig.* 28). On a :

$$(MM') = (MM_1) + (M_1M')$$

d'où l'on déduit, en faisant Δt infiniment petit :

$$\left(\lim \frac{MM'}{\Delta t}\right) = \left(\lim \frac{MM_1}{\Delta t}\right) + \left(\lim \frac{M_1M'}{\Delta t}\right)$$

Mais, par définition,

$$\lim \frac{MM'}{\Delta t} = V_a$$

Pour un observateur entraîné avec le système mobile, M et M_1 sont les positions, dans ce système, du point considéré aux époques t et $t + \Delta t$; MM_1 est donc le déplacement relatif, et

$$\lim \frac{MM_1}{\Delta t} = V_r$$

Enfin, M_1 et M' sont les positions aux deux époques t et $t + \Delta t$ d'un même point du système mobile; donc:

$$\lim \frac{M_1M'}{\Delta t} = V_e$$

et la formule précédente devient :

$$(V_a) = (V_e) + (V_r)$$

On peut l'écrire aussi de la manière suivante, souvent utile dans les applications :

$$(V_r) = (V_a) - (V_e)$$

40. Application géométrique. Tangente à la Cycloïde et à l'Épicycloïde. — Si l'on imagine une courbe donnée parcourue par un mobile, on peut toujours considérer la vitesse de ce mobile comme la résultante de deux autres vitesses, et, dans les cas où l'on sait construire ces deux vitesses en

grandeur et direction, on en déduit la vitesse absolue, c'est-à-dire la tangente à la courbe. Cette méthode de construction des tangentes est due à Roberval. Ainsi, les équations d'une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires, étant :

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t)$$

on peut regarder cette courbe comme étant la trajectoire d'un point se déplaçant avec une vitesse $f'(t)$ sur une droite mobile, toujours parallèle à Ox, et dont tous les points auraient une vitesse égale à $\varphi'(t)$.

Fig. 29.

Si l'on emploie les coordonnées polaires, la courbe donnée est la trajectoire d'un point mobile parcourant avec la vitesse $\frac{dr}{dt}$ le rayon vecteur OM ; le mouvement du point coïncidant sur ce rayon vecteur sera circulaire et la vitesse d'entraînement aura pour valeur $r\frac{d\theta}{dt}$.

L'application de cette méthode à la cycloïde et l'épicycloïde est particulièrement simple.

Fig. 30.

1. Soit la cycloïde (*fig.* 30) engendrée par le point M du cercle O roulant sans glisser sur la droite AC ; A étant le point de départ de M, on a :

$$\text{arc CM} = \text{CA}$$

La cycloïde est engendrée aussi par le point M se déplaçant sur le cercle O d'un mouvement tel que

$$\text{arc } CM = CA$$

en même temps que ce cercle glisse sur AC ; le mouvement du cercle étant supposé uniforme, CA varie proportionnellement au temps ; il en est de même de l'arc CM, et les deux mouvements sont uniformes et de vitesses égales. Si l'on représente ces vitesses par les segments égaux ME et MR, leur résultante, bissectrice de l'angle EMR, passera par C′ symétrique de C. Par suite, la tangente à la cycloïde en M est MC′ ; la normale passe par le point de contact.

2. Soit encore l'épicycloïde (*fig.* 31) engendrée par le point

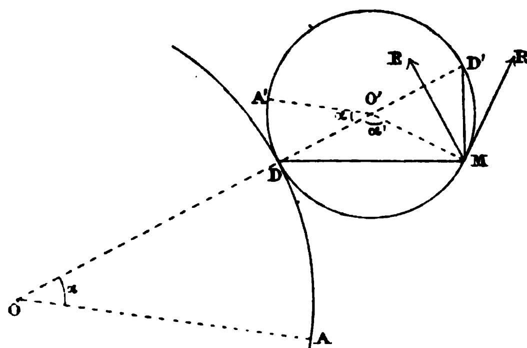


Fig. 31.

M du cercle O′ roulant sans glisser sur le cercle O ; A étant le point de départ de M, on a :

$$\text{arc } DA = \text{arc } DM$$

L'épicycloïde est engendrée aussi par le point M se dépla-

çant d'un mouvement relatif sur le cercle O', en même temps que ce cercle O' glisse d'un mouvement de translation uniforme en restant constamment tangent au cercle O. Les vitesses de ces deux mouvements seront choisies telles que l'on ait :

$$\text{arc DA} = \text{arc DM}$$

ce qui s'écrit :

$$R\alpha = R'\alpha' \tag{7}$$

en appelant R, R' les rayons de O et de O', α, α' les angles DOA, DOM. La vitesse d'entraînement V_e de M est dirigée suivant ME perpendiculaire à OO'; elle est la même que celle du point O', et a par suite pour valeur :

$$V^e = (R + R') \frac{d\alpha}{dt}$$

d'après l'expression connue de la vitesse dans un mouvement circulaire. Quant à la vitesse relative V_r de M, elle est dirigée suivant MR tangente au cercle O'. Dans l'intervalle considéré, le déplacement relatif de M est A'M, en appelant A' l'intersection avec le cercle O' de la parallèle O'A' à OA. La vitesse relative est donc, comme précédemment :

$$V_r = R' \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\right)$$

Mais, d'après l'équation (7), on a :

$$R \frac{d\alpha}{dt} = R' \frac{d\alpha'}{dt}$$

Par suite :

$$V_r = R' \frac{d\alpha}{dt} + R \frac{d\alpha}{dt} = (R + R') \frac{d\alpha}{dt}$$

Donc :

$$V_r = V_e$$

Les vitesses V_r, V_e sont représentées par les segments égaux MR, ME ; la tangente passe donc par D′, intersection de OO′ avec le cercle mobile, et la normale par D.

41. Application. Tangente aux Coniques. — Soit une courbe plane définie par une relation entre les distances $r, r', r'', \ldots$ d'un quelconque de ses points M à divers points fixes O, O′, O″... :

$$f(r, r', r'', \ldots\ldots) = 0$$

Proposons-nous de mener la tangente à cette courbe en l'un de ses points M ; nous ferons usage de la propriété suivante : si on imagine un mobile parcourant la courbe, la vitesse du mobile, projetée sur un rayon vecteur OM, sera $\frac{dr}{dt}$.

Soient $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ les angles de la tangente avec les différents rayons vecteurs OM, O′M, O″M,... On a :

$$v \cos\alpha = \frac{dr}{dt}$$

$$v \cos\alpha' = \frac{dr'}{dt}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Dans le mouvement, on a constamment entre $r, r', r'', \ldots\ldots$ la relation :

$$f(r, r', r'', \ldots\ldots) = 0$$

Par suite, en différentiant, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial f}{\partial r'}\frac{dr'}{dt}+\ldots\ldots=0$$

ou, en remplaçant $\frac{dr}{dt}$, $\frac{dr'}{dt}$ ..... par les quantités proportionnelles :

$$\cos\alpha\frac{\partial f}{\partial r}+\cos\alpha'\frac{\partial f}{\partial r'}+\ldots\ldots=0$$

Si l'on porte sur les rayons vecteurs OM, O'M, O''M,..... des quantités proportionnelles à $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial r'}$, $\frac{\partial f}{\partial r''}$, ... et que l'on construise la somme géométrique de ces divers segments, l'équation précédente exprime que la projection de la somme géométrique sur la tangente est nulle. Cette somme géométrique est donc dirigée suivant la normale à la courbe au point considéré.

Si l'on applique ces résultats à l'ellipse, dont l'équation, rapportée aux foyers, est :

$$r+r'=\mathrm{C^{te}}$$

$\frac{\partial f}{\partial r}$ est égal à $\frac{\partial f}{\partial r'}$, ce qui montre que la normale à l'elllipse est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs.

Pour l'hyperbole, on verrait de même que la normale en un point est la bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur passant par ce point et le prolongement de l'autre.

CHAPITRE IV

MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN

42. Théorème. — Pour qu'une figure mobile de l'espace coïncide avec une de ses positions, il suffit que trois points non en ligne droite coïncident avec leurs homologues.

Soient deux positions Σ, Σ' d'une même figure, A, B, C, trois points non en ligne droite de Σ, A′, B′, C′, leurs homologues dans Σ'. Les trois points A′, B′, C′ forment un triangle égal au triangle ABC. Si l'on fait coïncider ces deux triangles, tout point D de Σ coïncide avec son homologue D′ dans Σ'. En effet, les distances D′A′, D′B′, D′C′ sont respectivement égales aux distances DA, DB, DC. Donc, les deux triangles coïncidant, le point D′ ne peut se trouver qu'à l'intersection de trois sphères de rayon DA, DB, DC : par suite, ou bien D′ coïncide avec D, ou il occupe une position symétrique par rapport au plan ABC. La position symétrique est impossible ; car pour faire coïncider D′avec D il faudrait alors retourner le plan du triangle A′B′C′ qui ne coïnciderait plus avec ABC à moins qu'il ne soit isocèle ; et encore, dans ce cas, les triangles ne coïncideraient plus par leurs sommets homologues.

Ce théorème se simplifie dans le cas d'une figure plane. Il suffit alors d'établir la coïncidence de deux points avec leurs homologues. Soient A, B deux points de la figure Σ; A', B' leurs homologues dans la figure Σ'. Amenons AB sur son égal A'B' et considérons un point C de la première figure, C' étant son homologue dans la seconde. Or $CA = C'A'$, $CB = C'B'$; par suite C' ne peut coïncider qu'avec C ou avec son symétrique C'' par rapport à AB. La position C'' est impossible, car le triangle ABC'' ne peut être amené sans retournement à coïncider avec ABC à moins qu'il ne soit isocèle et encore dans ce cas les deux triangles ne coïncideraient plus par leurs sommets homologues.

Tous les mouvements des corps solides se ramènent à deux : 1° Un mouvement de translation; 2° un mouvement de rotation.

43. Mouvement de translation. — On dit qu'un système solide est animé d'un mouvement de translation, lorsqu'on peut passer d'une position de ce système à une autre position quelconque en faisant décrire à tous les points du solide des droites égales et parallèles. Il n'en résulte pas que les trajectoires des différents points soient effectivement des droites.

Théorème. — Dans un mouvement de translation, tous les points du système ont des vitesses égales et parallèles.

En effet, soient à l'instant t deux points M, M_1 d'une figure Σ animée d'un mouvement de translation ; M', M'_1 leurs homologues dans la figure Σ' à l'instant $t + \Delta t$. Par définition, les vitesses des points M et M_1 sont les limites de $\frac{MM'}{\Delta t}$ et

$\frac{M_1M_1'}{\Delta t}$ quand Δt tend vers 0. Mais $MM' = M_1M_1'$; par suite :

$$\text{limite} \frac{MM'}{\Delta t} = \text{limite} \frac{M_1M_1'}{\Delta t}$$

Réciproque. — Si tous les points d'un système mobile ont des vitesses constamment égales et parallèles, le mouvement du système est de translation.

Soient, en effet, M et M_1 deux points du système ; x, y, z, les coordonnées du premier ; x_1, y_1, z_1, celles du second. Par hypothèse, on a :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz_1}{dt}$$

d'où l'on déduit, en désignant par a,b,c des constantes :

$$x - x_1 = a$$
$$y - y_1 = b$$
$$z - z_1 = c$$

Ces égalités expriment que les projections du segment MM_1 (*fig.* 32) sur les axes coordonnés sont les mêmes à un instant quelconque. Par suite, le segment MM_1 se déplace parallèlement à lui-même pour venir en $M'M_1'$ pendant l'intervalle de temps Δt. La figure $MM_1M'M_1'$ est donc un parallélogramme et l'on peut poser $MM' = M_1M_1'$.

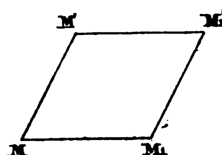


Fig. 32

Les droites joignant deux points quelconques du système à leurs homologues sont donc égales et parallèles. Le mouvement est par suite de translation.

44. Mouvement de rotation. — Nous avons défini précédemment un tel mouvement ; c'est celui que peut prendre un corps solide quand deux de ses points deviennent fixes.

Dans un tel mouvement, la vitesse d'un point quelconque du système n'est autre que le moment de la vitesse angulaire, portée sur l'axe dans un sens convenable, par rapport au point considéré. Il suit de là que, si l'axe de rotation est donné, les vitesses de tous les points du système sont connues en direction ainsi que les rapports de leurs grandeurs. Inversement, l'axe de rotation est déterminé lorsqu'on se donne en direction les vitesses de deux points quelconques du système ; une seule de ces vitesses peut être prise arbitrairement, et les vitesses de tous les autres points du système sont dès lors déterminées.

Théorème. — On peut toujours passer d'une position Σ d'une figure plane à une autre position quelconque Σ' par une rotation autour d'un point O convenablement choisi.

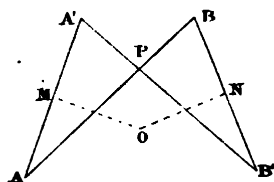


Fig. 33.

Pour établir la coïncidence des deux figures, il suffit d'amener deux points A et B de la figure Σ en coïncidence avec leurs homologues A′ et B′ de la figure Σ' (*fig.* 33). A cet effet, élevons respectivement sur les milieux de AA′ et de BB′ des perpendiculaires. En général, ces

perpendiculaires se couperont en un certain point O. Ce point O jouit de la propriété énoncée.

En effet considérons les triangles OAB, OA′B′; ils sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. On en déduit :

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

Si donc, par une rotation autour du point O, on amène A en A′, par suite de l'égalité des angles AOB et A′OB′, B viendra en B′, et les deux figures coïncideront dans toute leur étendue.

La manière dont nous avons trouvé le point O prouve qu'il est unique.

Au raisonnement précédent il y a une réserve à faire. Il faut admettre que les angles AOB et A′OB′ ont même disposition pour un observateur placé en O, ce qui revient à dire que le point O se trouve dans l'angle APB′ ou dans l'angle opposé par le sommet.

La démonstration tombe en défaut dans deux cas particuliers :

1° Si les perpendiculaires élevées au milieu de AA′ et BB′ sont confondues (*fig.* 34). Alors AA′, BB′ sont les deux bases d'un trapèze isocèle et le point de rencontre O de AB et A′B′ jouit de la propriété en question ;

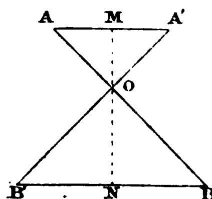


Fig. 34.

2° Si les perpendiculaires élevées au milieu de AA′ et BB′ sont parallèles (*fig.* 35). Elles se coupent alors à l'infini. Dans ce cas on peut amener les deux figures en coïncidence par une simple translation. On peut donc dire qu'un mouvement de

translation est un cas particulier d'un mouvement de rotation, le point autour duquel s'effectue la rotation étant à l'infini dans la direction de la perpendiculaire à AA'. Le point O, défini comme nous l'avons fait, s'appelle centre de rotation. Nous allons établir son existence par un autre raisonnement, exempt de l'objection que nous avons signalée plus haut.

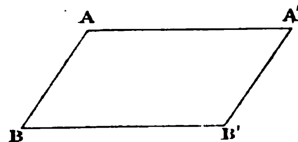


Fig. 35.

THÉORÈME. — Étant donnés un point A de la figure Σ et son homologue A' de la figure Σ', on peut toujours par les points A et A' mener deux rayons homologues qui se rencontrent.

En effet :

1° Ou bien les deux rayons homologues ne sont pas parallèles. Ils sont alors situés du même côté de AA' ou de côté différent.

S'ils sont du même côté de AA' (*fig.* 36) et ne se rencontrent pas, on peut leur substituer leurs prolongements, qui se rencontrent alors nécessairement et peuvent toujours être considérés comme deux rayons homologues.

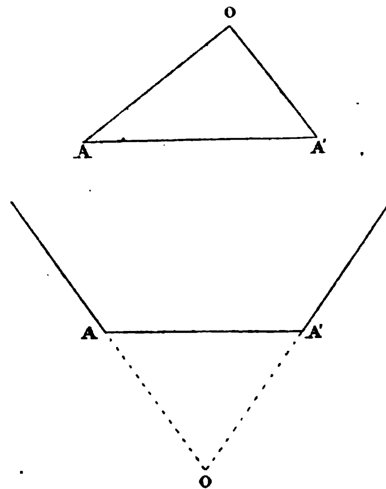


Fig. 36.

Si les deux rayons sont de côté différent de AA' (*fig.* 37),

désignons par α et β les angles qu'ils font avec cette droite et supposons $\alpha > \beta$. Les deux rayons ne cesseront pas d'être homologues si nous les faisons tourner dans le même sens d'un angle γ inférieur à α et supérieur à β; le rayon issu de A′ passe alors audessus de AA′ et nous retombons sur le cas précédent;

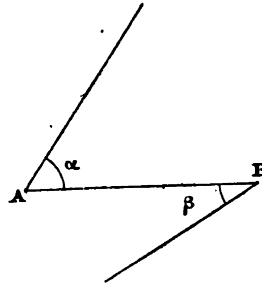


Fig. 37.

2° Ou bien les deux rayons homologues sont parallèles. Alors ils sont du même côté de AA′ ou de côté différent. S'ils sont du même côté, on peut faire coïncider les deux figures par une simple translation. S'ils sont de côté différent, une rotation autour du point O milieu de AA′ amène les deux rayons l'un sur l'autre.

Ceci posé, proposons-nous, étant donnés deux rayons homologues se rencontrant en M (*fig.* 38), de trouver un point de la seconde figure qui coïncide avec son homologue dans la première.

Si aux deux rayons issus de A et A′ on substitue deux rayons homologues voisins, la somme A + A′ des angles à la base reste constante, donc il en est de même de l'angle en M. Par suite, le lieu de M est un segment de cercle décrit sur AA′ ; le point O, milieu de l'arc AMA′, coïncide avec son homologue ; c'est donc le centre de rotation cherché.

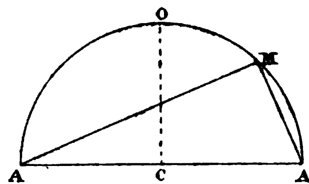


Fig. 38.

45. Relation entre les vitesses des différents points d'une figure plane. — Soit M la position d'un point quelconque d'une figure plane à l'instant t, M′ sa position à l'instant $t + \Delta t$ (*fig.* 39). Par définition, la vitesse de M est la limite de $\frac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$ quand Δt tend vers 0.

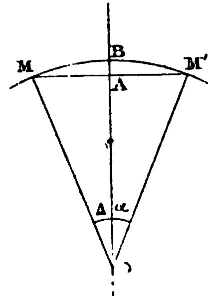


Fig. 39.

Or :

$$v = \text{limite} \frac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$$

$$= \text{limite} \frac{\text{corde MM}'}{\text{arc MM}'} \text{ limite} \frac{\text{arc MM}'}{\Delta t}$$

Mais on peut passer du point M au point M′ par une rotation de $\Delta\alpha$ autour d'un point O situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de MM′, par suite :

$$\text{arc MM}' = \text{OM}.\Delta\alpha$$

Donc :

$$v = \text{limite OM. limite} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \text{IM.} \frac{d\alpha}{dt}$$

I désignant la position limite de O. Ce point est appelé le centre instantané de rotation à l'époque t.

Il résulte de là que les vitesses de tous les points d'une figure plane à un instant quelconque sont les mêmes que si la figure tournait avec une certaine vitesse angulaire autour d'un point déterminé du plan. On voit en particulier que les normales aux trajectoires de tous les points vont passer par le centre instantané de rotation.

Si on connaît en direction les vitesses de deux points

mobiles à une même époque, le centre instantané de l'époque considérée se trouve sur les perpendiculaires menées par les points mobiles à la direction de leurs vitesses. On ne peut prendre arbitrairement en grandeur qu'une seule de ces vitesses.

THÉORÈME. — On peut réaliser le mouvement d'une figure plane par le roulement sans glissement de deux courbes convenablement choisies l'une sur l'autre.

En effet, considérons une suite de positions $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \Sigma'''$ de la figure, séparées par des intervalles de temps finis. Soient O, O', O'', O''' (*fig.* 40), les points autour desquels on doit tourner pour passer d'une position à la suivante. Supposons qu'ayant effectué les rotations on veuille revenir de la position Σ''' à la position Σ'. On doit tourner autour de O'', et si, avant la rotation, on a marqué dans la figure mobile le point O''', ce point dans le passage de la position Σ''' à la position Σ' viendra occuper une position O'''_1.

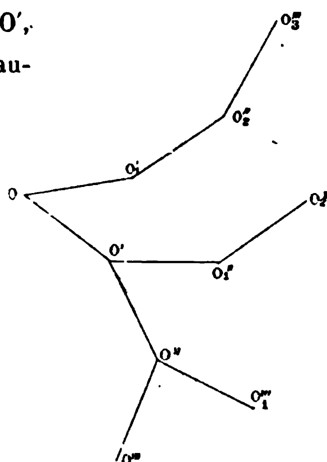


Fig. 40.

De même, si, marquant dans la figure mobile les points O'', O''', on passe de la position Σ'' à la position Σ' ces points viennent occuper les positions O''_1, O'''_2, et ainsi de suite. Finalement, nous aurons dans le plan fixe une suite de points O, O', O'', O''' et dans le plan mobile une autre suite O, O'_1, O''_2, O'''_3. Ces deux polygones formés en joignant les points deux à

deux ne font que rouler l'un sur l'autre dans les mouvements de rotation. Dans chaque position particulière ils ont un côté égal commun. Si donc nous faisons tendre les intervalles de temps qui séparent les positions Σ, Σ', Σ'', Σ''' vers O, chacun des polygones a pour limite une courbe. Ces deux courbes sont constamment tangentes et la courbe C', lieu des centres instantanés de rotation dans le plan mobile, ne fait que rouler sans glisser sur la courbe C, lieu des centres instantanés de rotation dans le plan fixe. Ces deux courbes sont, l'une C la base, l'autre C' la roulante. Elles caractérisent le mouvement de la figure mobile.

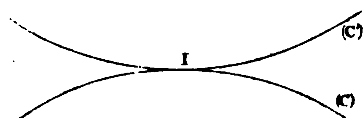


Fig. 41.

A une époque quelconque, le point de contact I des deux courbes est le centre instantané pour cette même époque.

Si on imagine un observateur entraîné avec le plan mobile, la courbe C' devient fixe pour cet observateur et la courbe C mobile. Ces deux courbes s'échangent alors entre elles, c'est-à-dire que la base devient la roulante et réciproquement.

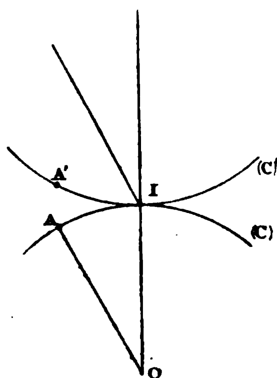


Fig. 42.

46. Vitesse de roulement. — Considérons les deux courbes C et C' à l'instant t (*fig.* 42). Le point de contact I de ces deux courbes sera le centre instantané de l'époque considérée. Soit

A le point du plan fixe qui sera centre instantané à l'époque $t+\Delta t$. Le point du plan mobile, qui deviendra centre instantané à cette même époque, sera en A′ tel que :

$$IA' = IA$$

Δt tendant vers o, la limite commune des deux rapports :

$$\frac{IA}{\Delta t}, \frac{IA'}{\Delta t}$$

est ce qu'on appelle vitesse de roulement. Nous la désignerons par V, et nous conviendrons de lui donner un signe, de même qu'à la vitesse angulaire ω. La vitesse de roulement sera considérée comme positive, si, passant de I en A, la normale à la base a tourné dans le sens positif, c'est-à-dire de Ox vers Oy. La vitesse angulaire sera positive lorsqu'une droite quelconque de la figure mobile tournera dans le sens positif.

47. Courbes enveloppes. — Considérons une certaine courbe C du plan mobile à un instant t, et soit C′ sa position à l'instant $t+\Delta t$ (*fig.* 43). Ces deux courbes se couperont en un certain point M_1 ; le lieu des points M, positions limites de M_1 quand Δt tend vers 0, est ce qu'on appelle l'enveloppe de la courbe mobile. Si on considère à un instant donné la courbe mobile et son enveloppe E (*fig.* 44), elles sont tangentes en un certain point M et la vitesse de ce point est nécessairement dirigée suivant la tangente commune à la courbe et à son enveloppe.

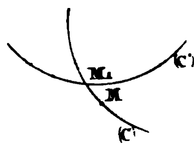


Fig. 43.

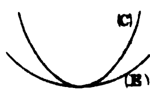


Fig. 44.

En effet, regardons M comme un point déterminé du plan mobile. On peut supposer que M, à l'instant considéré, a une vitesse nulle ; alors M est le centre instantané de rotation et le mouvement de C sur E est un mouvement de roulement. On peut aussi supposer que C glisse sur E, ou que C, roulant sur E, ait en même temps un mouvement de glissement ; dans les deux cas, la vitesse de M est bien dirigée suivant la tangente commune. Pour toute autre hypothèse sur la direction de la vitesse du point M, les deux courbes cesseraient d'être tangentes.

Donc le centre instantané, devant se trouver sur la normale à la trajectoire d'un point quelconque, se trouve sur la normale commune à la base et à l'enveloppe.

48. Relation entre la vitesse angulaire, la vitesse de roulement, le rayon de courbure de la base et celui de la roulante. — Soient, à l'époque t, ω, V, R, R′ ces éléments, I le centre instantané, point de contact de la base et de la roulante ; considérons les points A, A′ positions sur la base et la roulante du centre instantané à l'époque $t + \Delta t$, et les normales AO, A′O′ à ces deux courbes (*fig.* 45). Les droites AO, A′O′ sont homologues, puisqu'au temps $t + \Delta t$, A et A′ étant confondus, elles coïn-

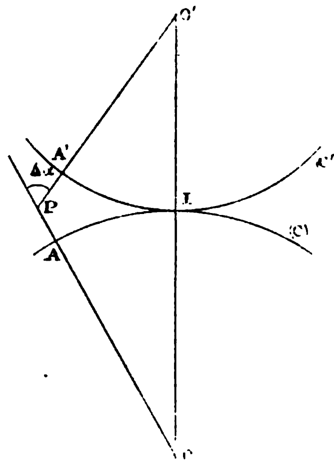


Fig. 45.

cident. Si l'on appelle $\Delta\alpha$ leur angle, on aura donc :

$$\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega$$

$$\lim \frac{IA}{\Delta t} = \lim \frac{IA'}{\Delta t} = V$$

Soit P le point d'intersection de AO et A'O' ; on a dans le triangle POO' :

$$\Delta\alpha = AOI + A'O'I$$

ou, en appelant Δs les arcs égaux IA, IA' :

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{AOI}{\Delta s} + \frac{A'O'I}{\Delta s}.$$

Si Δt est infiniment petit, on a :

$$\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{\omega}{V}$$

$$\lim \frac{AOI}{\Delta s} = \lim \frac{\sin AOI}{\text{corde } AI}$$

Or, dans le triangle AIO,

$$\frac{\sin AOI}{AI} = \frac{\sin AIO}{OA}$$

A la limite $AIO = 90°$, $OA = R$; donc :

$$\lim \frac{AOI}{\Delta s} = \frac{1}{R}$$

On voit de même que

$$\lim \frac{A'O'I}{\Delta s} = \frac{1}{R'}$$

et l'égalité considérée devient à la limite :

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

En convenant de prendre le sens IO comme sens positif sur la normale en I à la base et à la roulante, cette formule s'écrit:

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \qquad (1)$$

Elle s'applique alors à tous les cas de figure qui peuvent se présenter. Supposons, par exemple, que la base et la roulante aient leurs concavités de même sens (*fig.* 46), la deuxième étant intérieure à la première; on a dans ce cas :

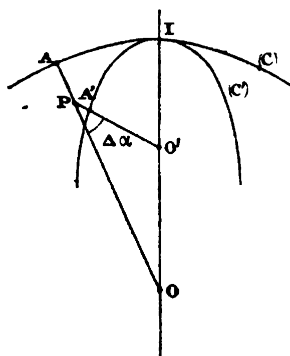


Fig. 46.

$$\Delta\alpha = A'O'I - AOI$$

La vitesse angulaire de la figure mobile étant ici négative, on en déduit, avec les conventions de signes établies:

$$-\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R}$$

ou :

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$$

Si, au contraire, la base est intérieure à la roulante (*fig.* 47), on a:

$$\Delta\alpha = AOI - A'O'I$$

d'où, la vitesse angulaire aussi bien que la vitesse de roulement étant ici positives :

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$$

On vérifierait de même la formule dans les cas où la vitesse de roulement aurait un sens contraire à celui que nous avons considéré.

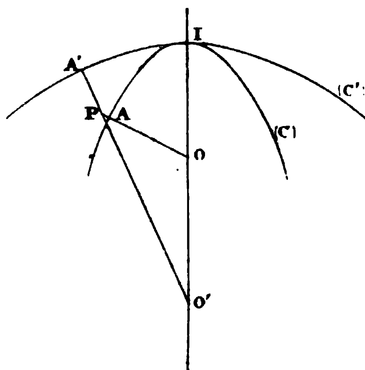


Fig. 47.

49. Relation donnant le rayon de courbure de la trajectoire d'un point. — Soient I le centre instantané au temps t, O, O' les centres de courbure de la base et de la roulante, A, A' les positions occupées par le centre instantané sur la base et la roulante au temps $t + \Delta t$, M un point de la figure mobile, qui vient en M' à l'époque $t + \Delta t$ (*fig.* 48). MI est la normale à la trajectoire de M ; le centre de courbure de cette trajectoire, relatif au point M, est donc sur MI en un certain point D ; de même, M' A est la normale en M'. Soit F l'intersection de ces deux normales ; la position limite de F est le point D. La droite MA' est homologue de M'A puisqu'au temps $t + \Delta t$, M est en M' et A' en A ; l'angle $\Delta\alpha$ de ces deux droites est donc l'angle de rotation de la figure, et l'on a :

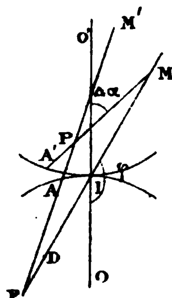


Fig. 48.

$$\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega$$

Soit P le point d'intersection de M'A et MA'; dans le triangle PMF on a :

$$\Delta\alpha = \text{PMF} + \text{MFP}$$

ou, en appelant Δs les arcs égaux IA, IA'

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\text{PMF}}{\Delta s} + \frac{\text{MFP}}{\Delta s}$$

En rendant Δt infiniment petit, on a :

$$\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta s} = \frac{\omega}{V}$$

$$\lim \frac{\text{PMF}}{\Delta s} = \lim \frac{\sin \text{PMF}}{\text{corde A'I}}$$

Or, dans le triangle A'IM, on a :

$$\frac{\sin \text{PMF}}{\text{A'I}} = \frac{\sin \text{MIA}}{\text{MA'}}$$

ou, en appelant φ l'angle de la direction IM avec la normale IO

$$\lim \frac{\text{PMF}}{\Delta s} = -\frac{\cos\varphi}{\text{MI}}$$

De même :

$$\lim \frac{\text{MFP}}{\Delta s} = \lim \frac{\sin \text{MFP}}{\text{AI}} = \lim \frac{\sin \text{AIF}}{\text{AF}} = -\frac{\cos\varphi}{\text{ID}}$$

L'égalité considérée devient donc à la limite :

$$\frac{\omega}{V} = -\left(\frac{1}{\text{IM}} + \frac{1}{\text{ID}}\right)\cos\varphi$$

En convenant de prendre sur la normale à la trajectoire du

point M le sens IM comme sens positif, cette formule s'écrit:

$$(2) \qquad \frac{\omega}{V} = \left(\frac{1}{ID} - \frac{1}{IM}\right)\cos\varphi$$

Elle s'applique alors à tous les cas de figure qui peuvent se présenter.

50. Relation faisant connaître le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe invariablement liée à la figure mobile — Soit C (*fig.* 49) une courbe invariablement liée à la figure mobile; son point de contact avec l'enveloppe se trouve sur la normale à cette courbe menée par le centre instantané I de rotation de l'époque considérée.

A l'époque $t + \Delta t$, C vient occuper une position C′ et le centre instantané I de rotation vient en A. Le nouveau point de contact de la courbe avec son enveloppe se trouve sur la normale à C′ issue de A. On a donc deux normales infiniment voisines à l'enveloppe qui se coupent en un point *d*.

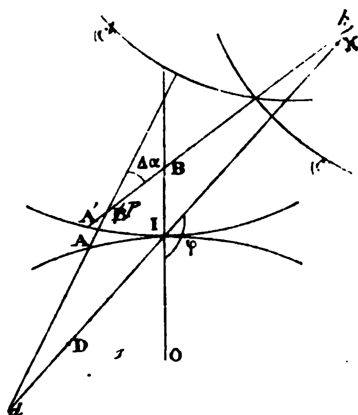


Fig. 49.

Lorsque Δt tend vers 0, ce point *d* tend vers une position limite D qui est le centre de courbure de l'enveloppe. Soit A′ le point de la roulante qui coïncide avec le point A de la base à l'époque $t + \Delta t$; en menant par A′ une normale à la courbe C, nous aurons une droite de la figure mobile homologue de la normale menée à C′ par le point A. Les deux normales à la

courbe C issues de I et de A′ se coupent en un point k, qui, lorsque Δt tend vers 0, tend vers une position limite K, centre de courbure de la courbe mobile.

Le triangle Pdk donne :

$$\Delta\alpha = k + d$$

ou, en divisant par Δs :

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{k}{\Delta s} + \frac{d}{\Delta s}$$

Faisons tendre Δs vers 0 ; il vient :

$$\text{limite}\ \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \text{limite}\ \frac{k}{\Delta s} + \text{limite}\ \frac{d}{\Delta s}$$

Or, limite $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\omega}{V}$. Pour évaluer les deux autres limites, considérons les triangles kA′I et dAI ; ils donnent, en désignant par φ l'angle de la direction IO avec la direction Ik :

$$\text{limite}\frac{k}{\Delta s} = \text{limite}\frac{\sin k}{\Delta s} = \text{limite}\frac{\sin k}{A'I} = \text{limite}\frac{\sin k A'I}{Ik} = -\frac{\cos\varphi}{IK}$$

$$\text{limite}\ \frac{d}{\Delta s} = \text{limite}\ \frac{\sin d}{AI} = \text{limite}\ \frac{\sin dAI}{Id} = -\frac{\cos\varphi}{ID}$$

Par suite

$$\frac{\omega}{V} = -\cos\varphi\left(\frac{1}{IK} + \frac{1}{ID}\right)$$

Mais, si nous convenons de regarder comme direction positive sur la droite kd la direction qui va du centre instantané I au centre de courbure K de la courbe mobile, la formule précédente devient :

$$(3) \qquad \frac{\omega}{V} = \cos\varphi\left(\frac{1}{ID} - \frac{1}{IK}\right)$$

En faisant d'autres hypothèses sur les situations respectives des diverses parties de la figure, on s'assurerait aisément que cette formule est générale.

Les deux relations que nous venons d'établir (**49**, **50**) vont nous permettre de construire le centre de courbure de la trajectoire d'un point lié à la figure mobile ainsi que celui de l'enveloppe d'une courbe liée à la figure mobile. Avant de le faire, rappelons quelques notions sur l'homographie.

51. Division homographique. — Supposons une droite indéfinie sur laquelle on fixe un point O. Imaginons sur cette droite un couple de points A, B (*fig.* 50) tels que :

$$\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB} = C^{te}$$

Si à A et B on substitue deux autres points A′, B′ satisfaisant à la même relation, on dit que les points A, B, A′, B′ forment une division homographique. O est le point double de la division.



Fig. 50.

Problème I. — Étant donnés le point double et un couple de points A, B d'une division homographique, on demande, connaissant un autre point A′ de la division, de trouver son conjugué.

A cet effet, joignons les points A, O, B (*fig.* 51) à un point quelconque M extérieur à la droite Ox. Menons par A′ une parallèle A′α à MO jusqu'à sa rencontre en α avec la droite MA. Joignons αO et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en β avec MB. Si par le point β nous menons une pa-

rallèle $\beta B'$ à MO jusqu'à sa rencontre en B' avec Ox, le point B' ainsi obtenu n'est autre que le conjugué du point A'.

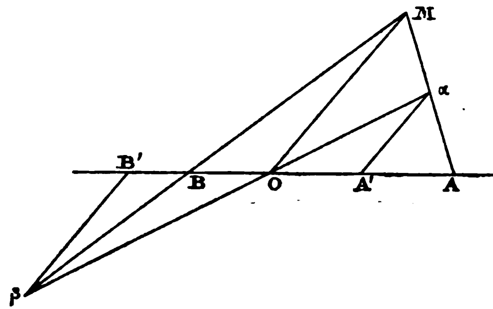


Fig. 51.

Pour le démontrer, prenons la droite AB comme axe des x, la droite MO comme axe des y et posons :

$$OA = a \quad OB = b \quad OA' = a' \quad OB' = b' \quad OM = m$$

Les équations des droites AM et MB sont

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{m} = 1$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{m} = 1$$

Je suppose que l'équation de la sécante $O\alpha$ soit

$$y = tx$$

t ayant une valeur déterminée que nous obtiendrons en écrivant que l'abscisse du point de rencontre α de cette droite avec MA est a'. Par suite :

$$\frac{1}{a} + \frac{t}{m} = \frac{1}{a'}$$

d'où :

$$t = m\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right)$$

et l'équation de la sécante Oα devient :

$$y = mx\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right)$$

D'autre part, le point de rencontre de Oα avec MB a pour abscisse b', donc :

$$\frac{b'}{b} + b'\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a}\right) = 1$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b'}$$

On en conclut :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}$$

Cette dernière égalité montre que B′ est bien le conjugué de A′ et justifie par suite la construction précédente.

Le choix du point extérieur M n'influe pas sur le résultat. On peut aussi aux deux points employés A et B substituer un couple quelconque de points conjugués.

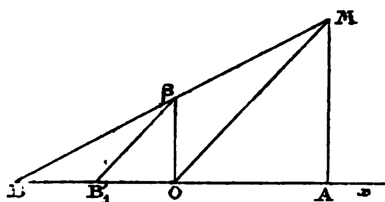


Fig. 52.

Problème II. — Construire dans une division homographique le conjugué d'un point à l'infini, étant donnés dans cette division le point double et un couple de points A, B (*fig.* 52).

De la construction précédente résulte la suivante.

On joint les points O, A, B à un point extérieur quelconque M. Par le point O, on mène une parallèle à MA jusqu'à sa rencontre en β avec MB et par le point β ainsi obtenu on mène la droite $\beta B_1'$ parallèle à MO jusqu'à sa rencontre en B_1' avec la droite Ox. Le point B_1' est le conjugué du point A′ à l'infini sur Ox.

Problème III. — Connaissant dans une division homographique le point double O et le conjugué B du point à l'infini (*fig.* 53), **déterminer le conjugué d'un point A′ faisant partie de cette division.**

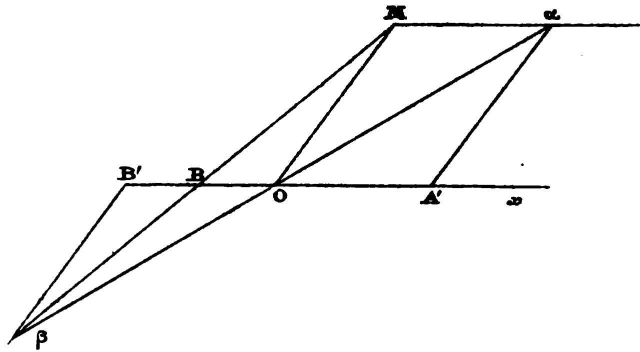


Fig. 53.

En nous reportant au problème I, nous déduisons la construction suivante : on joint les points O, B et le point à l'infini sur Ox à un point extérieur quelconque M. On mène par A′ une parallèle à MO jusqu'à sa rencontre en α avec la parallèle à Ox menée par M. On joint αO et l'on prolonge cette droite jusqu'a sa rencontre en β avec MB. La parallèle βB′ à MO menée par β rencontre Ox en un point B′, qui est le conjugué de A′.

52. Construction du centre de courbure de la courbe décrite par un point M invariablement lié à la figure mobile. — Cette construction porte le nom de construction de Savary. Soient O, O' les centres de courbure de la base et de la roulante; I le centre instantané de l'époque considérée (*fig.* 54). Joignons MI, MO'; par le point I menons une perpendiculaire à MI jusqu'à sa rencontre en N avec MO'. Si nous joignons NO, cette droite rencontre MI en un point D. Ce point D est le centre de courbure cherché. Il suffit, pour le prouver, de montrer qu'on a la relation

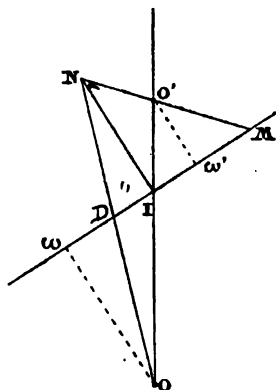


Fig. 54.

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \cos\varphi \left(\frac{1}{ID} - \frac{1}{IM}\right)$$

A cet effet, projetons les centres de courbure O et O' de la base et de la roulante en ω, ω' sur la droite MD, désignons par φ l'angle de IO avec IM et considérons le point I comme le point double d'une division homographique dont M et D forment un couple de points. Les points ω, ω' sont deux autres points de cette division; ceci résulte de la construction faite, qui est exactement la même que celle du problème I (**51**). Par suite :

$$\frac{1}{I\omega} - \frac{1}{I\omega'} = \frac{1}{ID} - \frac{1}{IM}$$

Si nous regardons sur la droite ωω' la direction IM comme direction positive et si nous remplaçons Iω et Iω' par leurs

valeurs dans la formule précédente, il vient :

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \cos\varphi \left(\frac{1}{ID} - \frac{1}{IM}\right)$$

Donc D est bien le centre de courbure cherché.

53. Cas particulier. — Un cas particulier assez fréquent est celui où la base est une droite. Dans cette hypothèse, le centre de courbure O est à l'infini (*fig.* 55). La construction se simplifie alors. On joint MI, MO′ et l'on élève par le point I une perpendiculaire sur MI jusqu'à sa rencontre en N avec MO′. Si on mène par le point N une parallèle à IO′, cette droite rencontre MI en un point D, qui est le centre de courbure cherché.

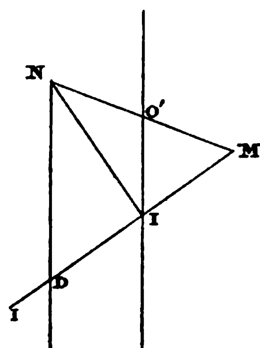


Fig. 55.

Il est quelquefois utile de connaître la position limite J de O′ lorsque O s'éloigne indéfiniment. Pour trouver ce point J il suffit de nous reporter au problème II (**51**). On mène par I une parallèle à MO jusqu'à sa rencontre en S avec MO′, et par ce point S on mène une parallèle à MI qui rencontre OO′ au point J cherché (*fig.* 56). On en déduit :

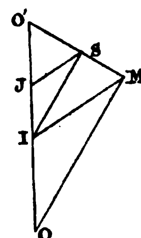


Fig. 56.

$$\frac{1}{IO} - \frac{1}{IO'} = -\frac{1}{IJ} = \frac{\omega}{V}.$$

Cette relation montre que si ω et V sont de même signe, IJ doit être négatif, c'est-à-dire que le point J doit être, par rapport

à I, sur la direction opposée à celle du centre de courbure de la base. Le point J étant déterminé, on s'en servira comme du point O′ de la figure précédente pour trouver les centres de courbure.

54. Construction du centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe invariablement liée à la figure mobile. — Nous supposerons qu'on sache trouver le centre de courbure K de la courbe mobile. Les relations

$$\frac{\omega}{V} = \cos\varphi\left(\frac{1}{ID} - \frac{1}{IM}\right)$$
$$\frac{\omega}{V} = \cos\varphi\left(\frac{1}{ID} - \frac{1}{IK}\right)$$

ne diffèrent que par le changement de M en K. Par suite, on peut, pour trouver le centre de courbure de l'enveloppe, appliquer la construction de Savary (**52**). On joint (*fig.*57) KI, KO′ et par I on élève une perpendiculaire IN sur KI jusqu'à sa rencontre en N avec KO′. On joint NO; le point D de rencontre de cette droite avec KI est le centre de courbure cherché.

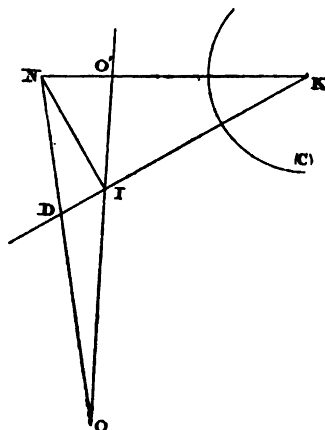


Fig. 57.

On peut se demander quel est le lieu des points de la figure mobile pour lesquels le rayon de courbure de la trajectoire est infini. Pour trouver ce lieu, reportons-nous à la construction du centre de courbure en faisant usage du point

J (**53**). Pour que D s'éloigne à l'infini (*fig.* 58), il faut que le point de rencontre de IN avec MJ s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire que les droites NI et MJ soient parallèles. Donc M doit être le sommet d'un angle droit dont les côtés passent par I et J, c'est-à-dire doit coïncider avec le point *m*. Le lieu de ce point *m* est une circonférence décrite sur IJ comme diamètre. On l'appelle la circonférence des inflexions. Tous ses points sont des points d'inflexion pour leurs trajectoires; il faut toutefois excepter le centre instantané.

Fig. 58.

55. Construction du centre de courbure de l'enveloppe d'une droite quelconque liée à la figure mobile. — Figurons en J (*fig.* 59) le point conjugué du point à l'infini sur la normale commune à la base et à la roulante et appliquons la construction de Savary (**53**). Le centre de courbure de la droite étant à l'infini, menons NJ parallèle à la droite IP normale à la droite considérée et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre en N avec la perpendiculaire à IP menée par I. Menons ND parallèle à IJ; le point de rencontre D de cette droite avec IP est le centre de courbure cherché.

Fig. 59.

De la construction même il résulte que IJ = ND. Par suite, le lieu du point N étant la circonférence des inflexions, le lieu du point D sera une circonférence symétrique de la précédente par rapport au point I. Cette circonférence porte le nom de circonférence des rebroussements. Elle contient en effet les points de rebroussement des enveloppes de toutes les droites de la figure mobile.

56. Applications. — 1° Supposons qu'un point de la figure mobile décrive une droite. Le rayon de courbure de la trajectoire de ce point est constamment infini. Par suite, ce point appartient à la circonférence des inflexions. Si on connaît un autre point de cette circonférence et le centre instantané, on pourra construire le cercle des inflexions, déterminer le point J diamétralement opposé au point I et par suite appliquer la construction de Savary à un point quelconque de la figure mobile.

2° Supposons qu'on assujettisse une droite de la figure mobile à passer constamment par un point fixe. L'enveloppe de cette droite est un cercle de rayon nul. Ce point fixe appartient donc à la circonférence des rebroussements. Si on connaît un autre point de cette circonférence et le centre instantané elle est déterminée, et on aura par suite la circonférence des inflexions. On peut donc appliquer la construction de Savary.

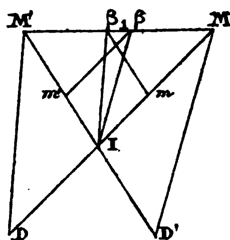


Fig. 60.

3° Enfin, supposons qu'on connaisse à une même époque

deux points M et M' de la figure mobile et les centres de courbure D et D' de leurs trajectoires (*fig.* 60). Cherchons à déterminer la circonférence des inflexions. Les droites MD, M'D' sont des normales aux trajectoires des points M et M'. Elles se coupent en un point I, qui est le centre instantané de l'époque considérée. On peut obtenir deux autres points de la circonférence des inflexions. En effet, si, en général, on considère un point M de la figure mobile et le centre de courbure D de sa trajectoire, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{ID}} - \frac{1}{\mathrm{IM}} = - \frac{1}{\mathrm{I}m}$$

m étant le point de la circonférence des inflexions se trouvant sur MD. On peut donc obtenir m en appliquant la construction du problème II (**51**). On trouverait de même le point m' de M'D' analogue de m. La circonférence des inflexions est donc déterminée. En prenant le point diamétralement opposé au point I, on obtiendra le point J.

57. Accélération des différents points de la figure mobile. — Soient M la position d'un point de la figure mobile à l'époque t, I le centre instantané de rotation de cette même époque. A l'époque $t + \Delta t$, M vient en M', I en I'. Soient v_m, $v_{m'}$ les vitesses des points M et M', ω la vitesse angulaire de la figure à l'époque t, $\omega + \Delta\omega$ la même vitesse à l'époque $t + \Delta t$. D'après ce que nous avons vu précédemment

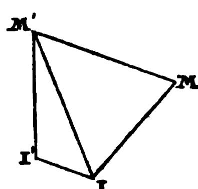


Fig. 61.

$$v_m = \mathrm{IM}.\omega$$
$$v_{m'} = \mathrm{I'M'}\,(\omega + \Delta\omega)$$

et les directions de ces vitesses sont celles des perpendiculaires à IM et à I'M' faisant avec ces droites des angles $+\frac{\pi}{2}$ si $\omega > 0$. Or, par définition, l'accélération est :

$$\gamma = \text{limite} \frac{(v_{m'}) - (v_m)}{\Delta t}$$

Appelons $v'_{m'}$ la vitesse du point de la figure mobile qui, à l'époque t, coïncide avec M'. On a :

$$v'_{m'} = \text{IM}'.\omega$$

la direction de cette vitesse faisant avec IM' l'angle $+\frac{\pi}{2}$.

On peut alors écrire :

$$\gamma = \text{limite} \frac{(v_{m'}) - (v'_{m'})}{\Delta t} + \text{limite} \frac{(v'_{m'}) - (v_m)}{\Delta t}$$

Or :

$$\text{limite} \frac{(v'_{m'}) - (v_m)}{\Delta t} = \omega\, \text{limite} \frac{(\text{IM}') - (\text{IM})}{\Delta t} = \omega\, \text{limite} \frac{\text{MM}'}{\Delta t} = \omega^2 \text{IM}$$

et la direction limite de ce segment fait l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec la direction limite de MM', quand Δt tend vers 0 ; c'est donc MI.

D'autre part :

$$\text{limite} \frac{(v_{m'}) - (v'_{m'})}{\Delta t} = \omega\, \text{limite} \frac{(\text{I}'\text{M}') - (\text{IM}')}{\Delta t} + \text{limite}\, \text{I}'\text{M}' \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$
$$= \omega\, \text{limite} \frac{\text{I}'\text{I}}{\Delta t} + \text{IM} \frac{d\omega}{dt} = \omega \text{V} + \text{IM} \frac{d\omega}{dt}$$

La direction limite du segment ωV est celle d'une perpen-

diculaire à I'I faisant avec cette droite un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou bien un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$ avec la direction II'.

La direction limite du segment IM $\frac{d\omega}{dt}$ est celle d'une perpendiculaire à IM faisant avec cette droite un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$.

Deux des composantes de l'accélération se réduisent à une. On sait en effet que l'on a :

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}$$

ou, en introduisant le point J défini plus haut :

$$\frac{\omega}{V} = -\frac{1}{IJ}$$

d'où

$$V = -\omega . IJ$$

La composante ωV a donc pour valeur $-\omega^2$. IJ, portée dans une direction opposée à celle où se trouve le centre de courbure de la base si ω et V sont de même signe. Elle donne avec la composante ω^2.MI une résultante égale à ω^2.MJ dirigée du point M vers le point J.

Fig. 62.

En résumé, les composantes de l'accélération du point M sont :

ω^2.MJ dirigée du point M vers le point J.

IM. $\frac{d\omega}{dt}$ dirigée suivant la demi-droite qui fait l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec IM.

58. Accélération normale. — L'accélération normale est la projection sur la normale MI de la composante $\omega^2.MJ$ (*fig.* 63), puisque l'autre composante est dirigée suivant une perpendiculaire à IM. Le point J se projette en m sur la circonférence des inflexions.

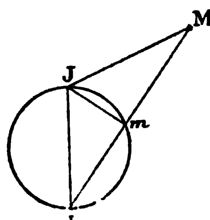


Fig. 63.

La composante normale de l'accélération est donc $\omega^2 Mm$ dirigée de M vers m.

On en déduit que les points de la circonférence des inflexions ont une accélération normale nulle. Mais l'accélération normale ayant la valeur connue $\frac{V^2}{\rho}$, on vérifie que les points de la circonférence considérée sont ceux où les rayons de courbure sont infinis, c'est-à-dire sont des points d'inflexion pour leurs trajectoires. On retrouve aussi la construction connue du centre de courbure à l'aide de cette propriété. On a, en effet (*fig.* 64),

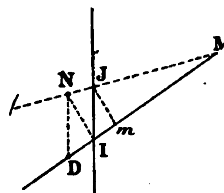


Fig. 64.

$$\omega^2.Mm = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2.IM^2}{\rho}$$

d'où :

$$\frac{Mm}{IM} = \frac{IM}{\rho}$$

En élevant IN perpendiculaire à MI, on a :

$$\frac{Mm}{MI} = \frac{MJ}{MN}$$

et, en menant ND parallèle à IJ,

$$\frac{JM}{MN} = \frac{MI}{MD}$$

Donc $MD = \rho$, c'est-à-dire que D est le centre de courbure de la trajectoire du point M. C'est la construction de Savary.

59. Centre des Accélérations. — On appelle ainsi le point dont l'accélération totale est nulle. Un tel point doit être sur la circonférence des inflexions, car son accélération normale est en particulier nulle. Il ne peut être sur la portion droite JQI de cette circonférence si la vitesse angulaire est croissante (*fig.* 65); car, pour tout point Q sur JQI, les deux composantes de l'accélération, dirigées dans le même sens suivant QJ, s'ajoutent. Au contraire, sur la moitié gauche de la circonférence, elles sont de sens contraire et peuvent se détruire ; il existe d'ailleurs un seul point m pour lequel cela ait lieu : car, en ce point, on a l'égalité :

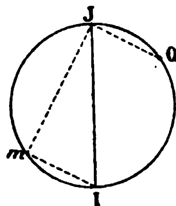


Fig. 65.

$$\omega^2 . mJ = Im . \frac{d\omega}{dt}$$

d'où :

$$\frac{mJ}{Im} = \frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}$$

et le rapport $\frac{mJ}{Im}$, qui, lorsque m va de J en I, passe par toutes les valeurs de 0 à l'∞, ne prendra qu'une seule fois la valeur considérée $\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}$.

Dans le cas particulier où la vitesse angulaire reste constante ou stationnaire, la composante $IM.\frac{d\omega}{dt}$ disparaît; l'accélération $\omega^2.MJ$ est centrale. Le point d'accélération nulle est le point J; l'accélération est la même que si la figure tournait avec une vitesse angulaire ω autour de J.

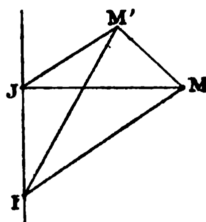


Fig. 66.

Dans le cas général, évaluons la différence géométrique des accélérations γ, γ' de deux points M, M' de la figure mobile (*fig.* 66):

$$(\gamma') - (\gamma) = [(M'J) - (MJ)]\,\omega^2 + [(IM') - (IM)]\,\frac{d\omega}{dt}$$

d'où:

$$(\gamma') - (\gamma) = (M'M)\,\omega^2 + (MM')\,\frac{d\omega}{dt}$$

La différence géométrique $(\gamma') - (\gamma)$ se compose donc de deux parties: la première $M'M.\,\omega^2$ portée dans la direction M'M, la deuxième $MM'\frac{d\omega}{dt}$, dans la direction faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec MM'; ce sont les composantes de l'accélération de M' dans l'hypothèse où ce point tournerait avec la vitesse angulaire ω autour de M. Si, en particulier, on choisit pour M le point d'accélération nulle, la différence calculée devient l'accélération du point M'. Donc, l'accélération d'un point quelconque de la figure est la même que si la figure tournait autour du point d'accélération nulle: ce qui justifie le nom de centre des accélérations donné à ce point.

60. Première application. — Centre de courbure de la cycloïde. — Soit la cycloïde engendrée par le point M du cercle O de rayon R roulant, sans glisser, sur la droite A_0A. Soit A le point de départ de M (*fig.* 67); on a :

$$\text{arc IM} = \text{IA}$$

O est le centre de courbure de la roulante, c'est-à-dire du cercle générateur.

Celui de la base A_0A est à l'∞ ; O coïncide donc avec le point que nous avons appelé J. Appliquons la construction de

Fig. 67.

Savary au point M; I étant le centre instantané, MI est la normale en M; la perpendiculaire en I à MI coupe MO au point N diamétralement opposé à M; la parallèle ND à OI coupe MI au centre de courbure D. On a d'ailleurs dans les triangles semblables MOI, MND :

$$\frac{\text{ID}}{\text{IM}} = \frac{\text{ON}}{\text{OM}} = 1$$

Donc :

$$\text{ID} = \text{IM}$$

Pour obtenir le centre de courbure D de la cycloïde au point M, il suffit donc de prolonger MI d'une longueur ID = IM.

Le rayon de courbure étant nul au point A, ce point est un point de rebroussement. Au point P, correspondant à la distance AL = πR, il est maximum et égal à 2R : ces considérations permettent d'indiquer la forme de la courbe.

Le lieu du point D, c'est-à-dire la développée de la cycloïde est une cycloïde égale à la première. En effet, D est sur le cercle symétrique du cercle générateur par rapport au point I ; par le point H d'intersection de OI avec ce cercle, menons HB parallèle à AA_0 ; prenons

$$AA_0 = \pi R$$

et

$$HB = IA_0$$

Nous aurons alors :

$$\text{arc } ID = \text{arc } IM = IA$$
$$\text{arc } HID = IA + \pi R = IA + AA_0 = HB$$

Par suite, si l'on considère D comme fixé au cercle symétrique, il décrira comme M une cycloïde ; la base de cette cycloïde, égale à la première, est HB : B, Q en sont les points de rebroussement, A un sommet. L'extrémité M d'un fil QDM attaché en Q et enroulé sur la cycloïde inférieure décrit la cycloïde supérieure, si on déroule le fil en le maintenant tendu. C'est le principe du pendule cycloïdal de Huyghens.

61. Deuxième application. — Centre de courbure de l'épicycloïde. — Soit l'épicycloïde engendrée par le point M

du cercle O′ de rayon R′ roulant, sans glisser, sur le cercle O de rayon R. Soit A le point de départ de M (*fig.* 68) ; on a :

$$\text{arc IM} = \text{arc IA}.$$

Le point de contact I des deux cercles est le centre instantané; O et O′ sont les centres de la base et de la rou-

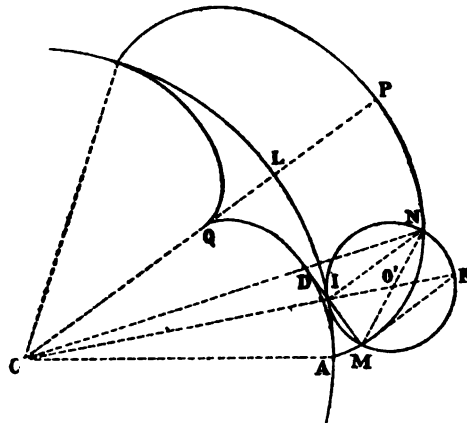


Fig. 68.

lante. La construction de Savary permet de déterminer le centre de courbure relatif au point M. La perpendiculaire en I à MI coupe MO au point N diamétralement opposé à M ; NO coupe la normale MI au point D cherché.

Le lieu du point D, c'est-à-dire la développée de l'épicycloïde, est une épicycloïde semblable à la première. En effet, ce lieu est homothétique du lieu de N, O étant le centre d'homothétie ; car les droites ID, KN sont parallèles comme perpendiculaires à IN et l'on a :

$$\frac{\text{OD}}{\text{ON}} = \frac{\text{OI}}{\text{OK}} = \frac{\text{R}}{\text{R}+2\text{R}'} = \text{C}^{\text{te}}$$

Or le point N est toujours diamétralement opposé à M : le

lieu de N est donc une épicycloïde égale à la première dont le rebroussement est situé en un point L tel que

$$\text{arc AL} = \pi R'$$

Par suite, la développée est une épicycloïde semblable dont le rebroussement Q correspond au sommet P de l'épicycloïde considérée.

62. Troisième application. — Mouvement d'une figure dont deux points décrivent deux cercles égaux. — La base et la roulante sont faciles à déterminer dans ce mouvement. Si l'on appelle (*fig.* 69) A, A' les deux points considérés de la figure mobile, O, O' les centres des deux cercles de rayon R, et si l'on suppose que la distance AA' est égale à O,O', les positions relatives des points A, A', O, O' donnent lieu à trois sortes de mouvements différents.

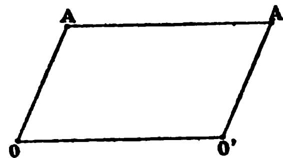


Fig. 69.

1. Les points A, A', O,O' forment un parallélogramme. Les normales AO, A'O' aux trajectoires de A, A' sont alors parallèles : le centre instantané est à l'∞ et le mouvement est de translation.

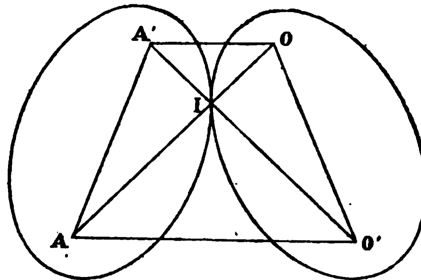


Fig. 70.

2 Les droites AA',OO' sont les côtés d'un trapèze isocèle

(*fig.* 69). Le centre instantané est alors le point de rencontre I de OA et O'A'. On a constamment :

$$IO + IO' = IO + IA = R$$

Le lieu de I, pour un observateur fixe, est donc une ellipse de foyers O,O' ; cette ellipse est la base dans le mouvement considéré. On a de même :

$$IA + IA' = R$$

et la roulante est une deuxième ellipse, égale à la première, de foyers A et A'. Ces deux ellipses sont toujours en contact par des points homologues, puisque les rayons vecteurs IA, IA' sont égaux aux rayons IO', IO.

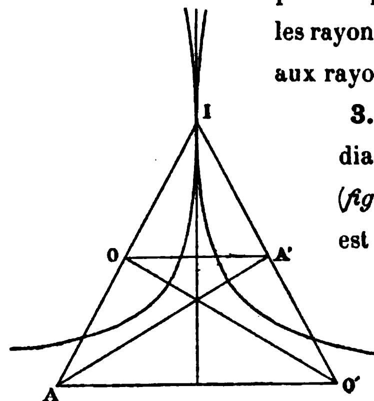


Fig. 71.

3. Les droites AA',OO' sont les diagonales d'un trapèze isocèle (*fig.* 71). Le centre instantané est au point I d'intersection de OA, O'A'. On a :

$$IO' - IO = IO' - IA' = R$$

Le lieu de I, pour un observateur fixe, est donc une hyperbole de foyers O,O'. Cette hyperbole est la base : de même, on a :

$$IA' - IA = R$$

La roulante est donc une hyperbole égale à la première ; elles sont en contact par leurs points homologues.

On connaît, pour une époque quelconque, les centres de courbure des trajectoires des points A et A′. On pourra donc tracer (56) la circonférence des inflexions, ce qui permettra de construire le rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque.

63. Quatrième application. — Mouvement d'une figure dont deux points décrivent deux droites fixes. — Soit AB une droite de la figure mobile dont les extrémités sont assujetties à décrire les deux droites fixes Ox, Oy (*fig.* 72).

Les trajectoires de A et B sont Ox, Oy ; leurs normales AI, BI se rencontrent au point I qui est le centre instantané. La longueur AB étant constante ainsi que l'angle AOB, le cercle décrit sur AB capable de l'angle AOB est invariable : il passe par I et son diamètre OI est constant. La distance OI étant constante, la base est le cercle décrit de O comme centre avec OI pour rayon. L'angle BIA est aussi constant ; AB est fixe dans la figure mobile; donc le lieu de I pour un observateur mobile est le cercle BIA. Ce cercle est la roulante et le mouvement est obtenu en faisant rouler un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double.

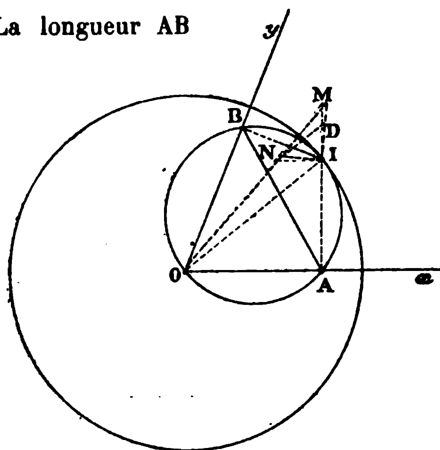


Fig. 72.

Pour appliquer la construction de Savary, décrivons la circonférence des inflexions. Elle passe par le point I et aussi par les points A et B puisque ces points décrivent des droites : c'est donc la petite circonférence tracée. Le centre de courbure de la trajectoire d'un point M quelconque s'obtient alors en menant par I une perpendiculaire à MI, jusqu'au point N sur MO ; la parallèle ND à OI donne le point D cherché.

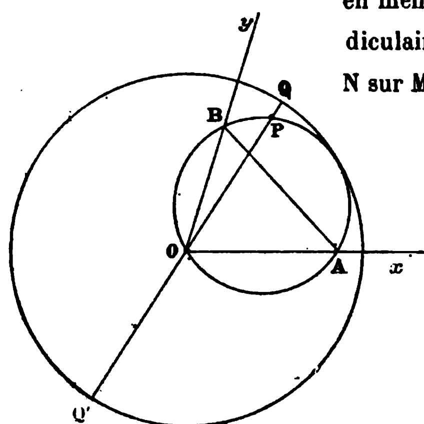


Fig. 73.

Dans ce mouvement, un point P quelconque du petit cercle décrit le diamètre POQ' du grand cercle. En effet, l'arc BP de la roulante est constant ; l'angle POB est aussi constant ; mais OB est fixe, par suite OP l'est aussi et le point P se déplace sur PO et décrit d'un mouvement alternatif le diamètre QOQ' de la base.

Nous avons donc établi le théorème suivant.

Théorème. — Quand un cercle roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon double, un point quelconque du premier cercle décrit un diamètre du second.

Ce théorème donne un moyen de transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. C'est le principe de l'engrenage de La Hire.

Si l'on imagine un observateur entraîné avec la droite AB

(*fig.* 74), le plan fixe a pour cet observateur un mouvement apparent inverse du précédent et qui s'en déduit immédiatement.

Dans ce mouvement, que nous allons étudier directement, la droite AB est fixe, l'angle xOy est mobile, mais de grandeur invariable, et ses deux côtés passent constamment par les points fixes A et B. La droite Ox enveloppe en A un cercle de rayon nul ; la normale commune à Ox et à son enveloppe est la perpendiculaire AI à Ox, qui, par son intersection avec BI, menée de même perpendiculaire à Oy, donne le centre instantané I ; il est sur la circonférence circonscrite à OAB, qui, passant par les points fixes A et B, est ici la base. Le diamètre OI de cette base est constant ; le lieu du point I dans le plan mobile est donc la circonférence décrite de O comme centre avec OI pour rayon. C'est la roulante.

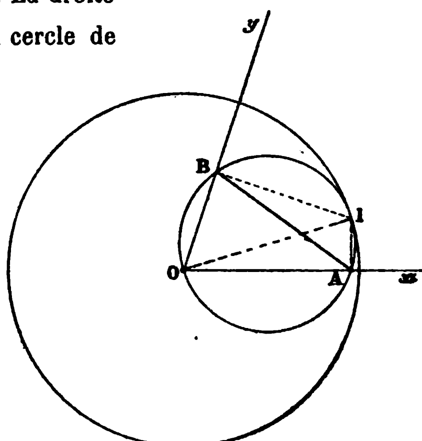


Fig. 74.

A et B sont ici les centres de courbure des enveloppes de Ox et Oy; ces deux points sont donc sur la circonférence des rebroussements qui passe aussi par I. C'est donc la petite circonférence tracée ; elle permettra d'appliquer la construction de Savary.

Ce mouvement jouit d'une propriété corrélative de celle que nous avons démontrée précédemment. Un diamètre quelcon-

que OS du grand cercle passe constamment par un point fixe R du petit cercle (*fig.* 75). En effet, l'angle SOy est invariable dans la figure mobile; il a pour mesure un arc constant; or il est mesuré par l'arc BR qui est par suite constant. Mais le point B est fixe; le point R est donc fixe aussi et le diamètre OS passe toujours par le point fixe R. On peut donc énoncer le théorème suivant.

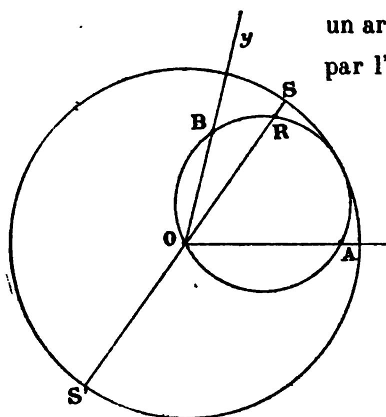


Fig. 75.

THÉORÈME. — *Quand un cercle roule sans glisser sur un cercle de rayon moitié moindre qui lui est intérieur, un diamètre quelconque du grand cercle passe constamment par un point fixe du petit cercle.*

Dans le premier cas, où l'angle AOB est fixe, la trajectoire d'un point P quelconque (*fig.* 76) de la figure mobile est une ellipse. Pour le prouver, nous choisirons le cas particulier où la vitesse angulaire ω de la figure mobile est constante.

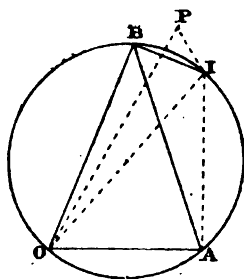


Fig. 76.

Le point O est ici celui que nous avons désigné par J (**53**); l'accélération se réduit à la composante

$$PO.\omega^2$$

dirigée de P vers O, puisque l'autre composante

$$\text{IP}.\frac{d\omega}{dt}$$

est nulle, ω étant constant. Les projections de l'accélération sur deux axes rectangulaires quelconques Ox, Oy, passant par le point O, sont donc, en appelant r la distance PO et x, y les coordonnées de P

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 r\left(-\frac{x}{r}\right) = -\omega^2 x$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 r\left(-\frac{y}{r}\right) = -\omega^2 y$$

On en déduit, en intégrant :

$$x = \text{A} \cos \omega t + \text{B} \sin \omega t$$
$$y = \text{A}' \cos \omega t + \text{B}' \sin \omega t$$

et l'équation de la trajectoire de P s'obtient en éliminant t entre ces deux équations. En les résolvant, on a :

$$\sin \omega t = \frac{\text{A}y - \text{A}'x}{\text{AB}' - \text{BA}'}$$
$$\cos \omega t = \frac{\text{B}'x - \text{B}y}{\text{AB}' - \text{BA}'}.$$

En ajoutant membre à membre, après avoir élevé au carré, on obtient l'équation :

$$(\text{A}y - \text{A}'x)^2 + (\text{B}'x - \text{B}y)^2 = (\text{AB}' - \text{BA}')^2$$

La trajectoire, représentée par cette équation, est donc une ellipse ; le résultat est d'ailleurs évidemment indépendant de l'hypothèse faite sur la vitesse angulaire.

Dans le cas particulier où l'on a :

$$AB' - BA' = o$$

ou

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

x et y varient proportionnellement ; le lieu de P est une droite : c'est ce qui a lieu comme nous venons de le voir pour les points situés sur le cercle OAB.

La construction de Savary permet de trouver le rayon de courbure de la trajectoire de P, et nous allons en déduire une construction du rayon de courbure en un point d'une ellipse.

64. Construction du rayon de courbure d'une ellipse déterminée par ses axes. — Si les extrémités d'une droite invariable AB (*fig.* 77) glissent sur deux droites rectangulaires Ox, Oy, un point P quelconque de cette droite décrit une ellipse (**63**) ; les axes de cette ellipse ont évidemment pour longueurs PB et PA.

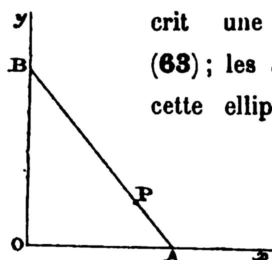


Fig. 77.

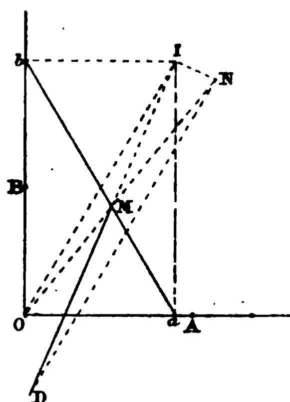


Fig. 78.

Inversement, si un point M (*fig.* 78) est donné sur une ellipse d'axe OA, OB, en traçant de M comme centre, avec

OA pour rayon, un arc de cercle qui coupe OB en *b*, le point M de la droite *b*M*a* décrit l'ellipse considérée quand les extrémités *a*, *b* de cette droite glissent sur OA, OB. Le problème revient donc à chercher le rayon de courbure de la trajectoire de M dans le mouvement de *ab* ; il est immédiatement résolu par la construction de Savary (**52**).

Les perpendiculaires *a*I, *b*I à OA, OB se coupent au point I, centre instantané de la figure ; IM est par suite la normale à l'ellipse. Si, par le point N, où la perpendiculaire NI à IM coupe la droite MO, on mène la parallèle ND à IO, son point de rencontre D avec IM est le centre de courbure cherché.

65. Cinquième application. — Mouvement d'un triangle dont deux côtés restent tangents à deux

Fig. 79.

cercles fixes. — Soit ABC (*fig.* 79) un triangle dont les côtés AB, AC restent tangents à deux cercles de centres E et F.

L'enveloppe du troisième côté BC est aussi un cercle. En effet, le centre instantané se trouve sur la normale commune à AB et à son enveloppe, c'est-à-dire sur la perpendiculaire EI à AB ; il est de même sur la perpendiculaire FI à AC ; c'est

donc le point d'intersection I de ces deux droites. La normale commune au troisième côté et à son enveloppe est, par suite, la perpendiculaire ID à BC. Mais l'angle EIF, supplément de l'angle A, est constant; de plus, ses côtés passent par deux points fixes E, F; il se déplace donc suivant une loi déjà étudiée (**63**). Le cercle qui passe par les points fixes E, F et par le point I est invariable, puisque l'angle EIF est constant. C'est la base dans le mouvement de EIF. Soit O le point où la droite ID rencontre ce cercle; ce point O est fixe, car la droite ID est invariablement liée à l'angle EIF, puisque l'angle DIF, égal à l'angle C, est constant. Dans le mouvement de EIF, ID est donc un diamètre de la roulante et nous avons vu (**63**) que tout diamètre de la roulante passe par un point fixe de la base. Toutes les normales à l'enveloppe de BC passent donc par un point fixe; cette enveloppe est un cercle.

Des considérations analogues permettent de trouver le lieu du point A. En menant par E et F des parallèles EA', FA' à AB, AC, nous formons un quadrilatère inscriptible dont le sommet A' est sur la circonférence tracée. L'angle EA'F est donc encore un angle constant dont les côtés passent par les points fixes E et F. Il forme avec ABC une figure invariable puisque ses côtés sont à des distances constantes de leurs parallèles AB, AC. La distance AA' est donc constante. D'ailleurs, comme précédemment, le point R, où la droite AA', invariablement liée à l'angle EA'F, rencontre le cercle, est un point fixe. On peut donc regarder A comme obtenu en retranchant une longueur constante AA' de toutes les cordes du cercle issues du point fixe R. Le lieu de A est par suite un limaçon de Pascal.

66. Théorie analytique du mouvement d'une figure plane dans son plan — Tous les résultats, relatifs au mouvement d'une figure plane dans son plan, que nous venons d'obtenir par des considérations géométriques, peuvent aussi s'établir par le calcul.

Soient *xoy* un système d'axes fixes, XOY un système d'axes liés à la figure mobile et entraînés dans son mouvement, a, b les coordonnées du point O, α l'angle de OX avec *ox*. Le mouvement étant déterminé, a, b, α doivent être regardés comme des fonctions du temps t. On peut aussi traiter a, b, comme des fonctions de α et α seul comme fonction de t; c'est ce mode de définition, plus avantageux pour le calcul, que nous allons adopter. Nous désignerons par des lettres accentuées les dérivées prises par rapport à α.

Les coordonnées x, y d'un point M de la figure mobile de coordonnées X, Y, ont pour expressions :

$$x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$
$$y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

Les composantes de la vitesse de ce point s'obtiennent en différentiant ces équations, dans lesquelles X, Y sont des quantités constantes; elles ont pour valeurs :

$$\frac{dx}{dt} = (a' + b - y)\,\omega$$
$$\frac{dy}{dt} = (b' - a + x)\,\omega$$

en désignant par ω la vitesse angulaire de la figure, qui est égale à $\frac{d\alpha}{dt}$. Pour interpréter ces formules, posons :

$$a - b' = u$$
$$a' + b = v$$

Les équations précédentes deviennent :

$$\frac{dx}{dt} = -(y - v)\,\omega$$

$$\frac{dy}{dt} = (x - u)\,\omega$$

En appelant n la distance MI du point M au point I de coordonnées u, v, et φ l'angle de IM avec ox, nous aurons :

$$x - u = n \cos \varphi$$

$$y - v = n \sin \varphi$$

et par suite :

$$\frac{dx}{dt} = n\omega \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = n\omega \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

La vitesse du point M a donc pour valeur absolue $n\omega$, c'est-à-dire le produit de la vitesse angulaire par la distance IM ; sa direction fait avec IM l'angle $+\frac{\pi}{2}$ si ω est positif, l'angle $-\frac{\pi}{2}$ si ω est négatif. En résumé, la vitesse est la même que si la figure tournait à l'instant considéré autour du point I, dont les coordonnées sont d'ailleurs variables avec le temps ; ce point I est le centre instantané de la figure à l'époque considérée.

Pour un observateur entraîné avec le plan mobile, la vitesse apparente du point du plan fixe de coordonnées x, y, qui coïncide avec M, a pour projections $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$ sur les axes mobiles. Or on a :

$$X = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha$$

$$Y = -(x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha$$

La différentiation donne, puisque x, y sont des constantes :

$$\frac{dX}{dt} = [(y \quad b - a') \cos\alpha - (x - a + b') \sin\alpha]\,\omega$$

$$\frac{dY}{dt} = [-(x - a + b') \cos\alpha - (y - b - a') \sin\alpha]\,\omega$$

ou :

$$\frac{dX}{dt} = [(y - v) \cos\alpha - (x - u) \sin\alpha]\,\omega$$

$$\frac{dY}{dt} = [-(x - u) \cos\alpha - (y - v) \sin\alpha]\,\omega$$

ou enfin :

$$\frac{dX}{dt} = n\omega \sin(\varphi \quad \alpha)$$

$$\frac{dY}{dt} = -n\omega \cos(\varphi - \alpha)$$

Posons :

$$\varphi - \alpha = \Phi$$

Les formules deviennent :

$$\frac{dX}{dt} = n\omega \cos\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dY}{dt} = n\omega \sin\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

La vitesse apparente a donc aussi pour valeur absolue $n\omega$; sa direction est opposée à celle de la vitesse réelle, car la direction qui fait l'angle Φ ou $\varphi - \alpha$ avec OX coïncide avec la direction qui fait l'angle φ avec ox. Par suite la vitesse réelle de M et la vitesse apparente du point coïncidant sont égales en grandeur et direction, mais sont de sens opposés.

Cherchons si dans ce cas il existe un centre instantané de rotation. A cet effet posons :

$$U = a' \sin \alpha - b' \cos \alpha$$
$$V = a' \cos \alpha + b' \sin \alpha$$

Alors:

$$\frac{dX}{dt} = (Y - V) \frac{d\alpha}{dt}$$
$$\frac{dY}{dt} = -(X - U) \frac{d\alpha}{dt}$$

Ces formules montrent que la vitesse apparente du point du plan fixe, dont les coordonnées sont par rapport aux axes mobiles X et Y, est la même que si à l'instant considéré le plan fixe tournait avec une vitesse angulaire constante autour du point dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles sont U et V.

Les deux centres instantanés coïncident. En effet, cherchons par rapport aux axes fixes les coordonnées du point qui, dans le système mobile, a pour coordonnées U et V. Elles sont données par les formules :

$$x = a + U \cos \alpha - V \sin \alpha$$
$$y = b + U \sin \alpha + V \cos \alpha$$

Or :

$$U \cos \alpha - V \sin \alpha = - b'$$
$$U \sin \alpha - V \cos \alpha = a'$$

Par suite :

$$x = a - b' = u$$
$$y = b + a' = v$$

La suite des positions du centre instantané dans le plan fixe et dans le plan mobile forme deux certaines courbes, qui ont à chaque instant un point commun. Je dis qu'elles sont tangentes en ce point. En effet, considérons les accroissements du, dv correspondant à un intervalle de temps dt.

$$du = (a' - b'')\, d\alpha$$
$$dv = (a'' + b')\, d\alpha$$

Les variations de U et V dans le même intervalle sont :

$$dU = [(a'' + b') \sin\alpha + (a' - b'') \cos\alpha]\, d\alpha$$
$$dV = [(b'' - a') \sin\alpha + (a'' + b') \cos\alpha]\, d\alpha$$

En comparant ces deux égalités aux précédentes, on déduit :

$$dU = dv \sin\alpha + du \cos\alpha$$
$$dV = -du \sin\alpha + dv \cos\alpha$$

Posons :

$$du = \cos\theta d\sigma \qquad dv = \sin\theta d\sigma$$

$d\sigma$ représente le déplacement du centre instantané dans le plan fixe pendant l'intervalle de temps dt, θ l'angle de la direction de ce déplacement avec ox.

Posons de même:

$$dU = \cos\Theta d\Sigma \qquad dV = \sin\Theta d\Sigma$$

Θ et Σ désignant des quantités analogues aux précédentes relativement au plan mobile. Les égalités précédentes deviennent alors:

$$\cos\Theta d\Sigma = \cos(\theta - \alpha)\, d\sigma$$
$$\sin\Theta d\Sigma = \sin(\theta - \alpha)\, d\sigma$$

En élevant les deux membres au carré et ajoutant, il vient :

$$d\Sigma = d\sigma$$

Par suite, les déplacements du centre instantané dans le plan fixe et le plan mobile, correspondant à un même intervalle de temps, sont égaux.

Si on divise membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient :

$$\Theta = \theta - \alpha$$

Cette égalité exprime que les déplacements du centre instantané dans le plan fixe et le plan mobile se font suivant la même direction. En effet, le déplacement qui fait avec OX l'angle Θ fait avec ox l'angle $\Theta + \alpha = \theta$.

Donc les deux courbes sont bien tangentes et elles roulent sans glisser l'une sur l'autre.

67. Courbes enveloppes. — Considérons une courbe liée à la figure mobile, on peut toujours supposer son équation mise sous la forme

$$F(x.y.t) = 0$$

En effet, si une courbe occupe une position déterminée dans le plan mobile, son équation sera de la forme :

$$\Phi(X.Y) = 0$$

D'autre part, le mouvement de la figure plane est déterminé, donc :

$$X = f_1(x.y.t)$$
$$Y = f_2(x.y.t)$$

En remplaçant X et Y par ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient bien pour la courbe mobile une équation de la forme :

$$F(x.y.t) = 0$$

Considérons deux positions voisines de cette courbe correspondant aux époques t et $t + \Delta t$. Ces deux courbes se coupent en un certain nombre de points. Si on en considère un, M, lorsque Δt tend vers 0, il tend vers une position limite M′ et le lieu des points M′ est ce qu'on appelle l'enveloppe de la courbe considérée. On obtient son équation en éliminant t entre les deux équations.

(1) $$F(x.y.t) = 0$$

(2) $$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Théorème. — L'enveloppe et l'enveloppée sont tangentes en leur point commun.

En effet considérons une position particulière de l'enveloppée, c'est-à-dire donnons à t une certaine valeur. Le coefficient angulaire m de la tangente à cette courbe au point considéré sera fourni par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + m \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Or l'équation (1) représente l'équation de l'enveloppe si on y regarde t comme une fonction de x, y définie par l'équation (2). Le coefficient angulaire m' de la tangente à cette enveloppe au point considéré sera donné par l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + m'\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right) = 0$$

Mais le point considéré est commun à l'enveloppe et à l'enveloppée ; donc ses coordonnées vérifient l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Par suite l'équation faisant connaître m' est la même que celle faisant connaître m. Donc $m = m'$.

Théorème. — Le point commun à la courbe et à son enveloppe, considéré comme entraîné avec la figure mobile, a une vitesse dirigée suivant la tangente commune à la courbe et à son enveloppe.

Soit m'' le coefficient angulaire de la direction du déplacement du point considéré.

Je dis que :

$$m = m' = m''$$

En effet, le point appartient constamment à la courbe dont l'équation est :

$$F(x,y,t) = 0$$

Si donc nous considérons les variations Δx, Δy des coordonnées de ce point correspondant à un intervalle de temps Δt, on a entre Δx et Δy la relation :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t = 0$$

Mais les coordonnées du point considéré vérifient l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y = 0$$

En passant à la limite, nous obtiendrons m'' par l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + m''\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Il en résulte :

$$m = m' = m''$$

On en conclut, comme nous l'avons déjà remarqué, que la normale menée à une courbe de la figure mobile au point où elle touche son enveloppe passe par le centre instantané de rotation.

68. Équation différentielle de la trajectoire d'un point quelconque M invariablement lié à la roulante quand la base est une droite. — Prenons la base comme axe des x et une perpendiculaire quelconque comme axe des y (*fig.* 80). Le point M étant invariablement lié à la roulante, on peut imaginer l'équation de la courbe mise sous la forme

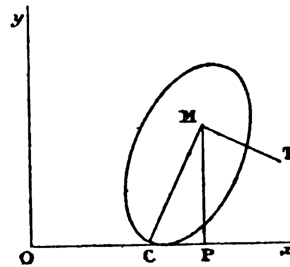


Fig. 80.

$$r = f(p)$$

r et p désignant les distances du point M au point de contact

C et à la droite Ox. Or :

$$\frac{p}{r} = \cos \widehat{\mathrm{CMP}}$$

Mais MC est une normale à la trajectoire du point M, par suite $\widehat{\mathrm{CMP}}$ est égal à l'angle de la tangente à la trajectoire du point M avec la direction des x positifs. Donc :

$$\frac{p}{r} = \frac{dx}{ds}$$

L'équation différentielle de la trajectoire du point M est donc, en remarquant que $p = y$

$$\frac{y}{f(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

69. Application : Lieu du foyer d'une parabole roulant sans glisser sur une droite. — L'équation de la

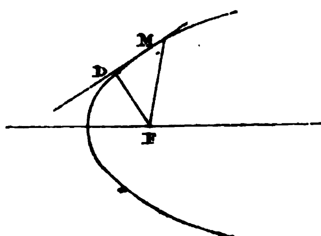


Fig. 81.

parabole en coordonnées polaires, le foyer étant pris comme pôle et l'axe de la parabole comme axe polaire, est :

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

ou en posant $\frac{p}{2} = q$

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \qquad (1)$$

Or dans le triangle rectangle DFM (*fig.* 81) on a :

$$FD = FM \sin \widehat{FMD}$$

et comme la tangente à la parabole fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et la parallèle à l'axe

$$\widehat{FMD} = 90^0 - \frac{\theta}{2}$$

Par suite :

$$p = r \cos \frac{\theta}{2} \qquad (2)$$

En éliminant θ entre les deux équations (1) et (2) nous aurons l'équation de la parabole mise sous la forme $r = f(p)$. Cette relation est :

$$r = \frac{p^2}{q}$$

L'équation différentielle de la trajectoire du foyer est donc :

$$\frac{q}{y} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

d'où on déduit :

$$y' = \sqrt{\frac{y^2 - q^2}{q^2}}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - q^2}} = \frac{dx}{q}$$

Ou bien encore :

$$\frac{d\left(\frac{y}{q}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{q}\right)^2 - 1}} = \frac{dx}{q}$$

En intégrant il vient :

$$\mathrm{L}\left[\frac{y}{q} + \sqrt{\left(\frac{y}{q}\right)^2 - 1}\right] = \frac{x - x_0}{q}$$

Ou en passant des logarithmes aux nombres :

$$\frac{y}{q} + \sqrt{\left(\frac{y}{q}\right)^2 - 1} = e^{\frac{x - x_0}{q}}$$

De cette équation on déduit :

$$\frac{y}{q} - \sqrt{\left(\frac{y}{q}\right)^2 - 1} = e^{-\frac{x - x_0}{q}}$$

Par suite la trajectoire du foyer a pour équation :

$$y = \frac{q}{2}\left\{e^{\frac{x - x_0}{q}} + e^{-\frac{x - x_0}{q}}\right\}$$

Cette courbe est une chaînette dont la base est précisément la droite donnée.

70. Accélération dans le mouvement d'une figure plane dans son plan. — Nous avons vu (**66**) que si u, v désignent les coordonnées d'un certain point du plan fixe, les composantes de la vitesse d'un point quelconque du plan mobile sont :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\,(y - v)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega\,(x - u)$$

Cherchons à déduire de ces formules les composantes de l'accélération suivant les axes. Si nous les désignons par γ_x, γ_y on a :

$$\gamma_x = -\frac{d\omega}{dt}(y - v) - \omega\left[\omega(x - u) - \frac{dv}{dt}\right]$$

$$\gamma_y = \frac{d\omega}{dt}(x - u) + \omega\left[-\omega(y - v) - \frac{du}{dt}\right]$$

Pour interpréter ces formules prenons des axes particuliers relatifs à l'époque considérée. Prenons pour origine des coordonnées le centre instantané I de l'époque considérée, pour axe des x la tangente commune à la base et à la roulante prise dans le sens où s'effectue le roulement si $V > o$, pour axe des y la normale commune à la base et à la roulante du côté du centre de courbure de la base. Alors :

$$u = o \qquad v = o \qquad \frac{dv}{dt} = o \qquad \frac{du}{dt} = V$$

Les composantes de l'accélération sont donc :

$$\gamma_x = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x$$

$$\gamma_y = x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y - \omega V.$$

Ces formules montrent que l'accélération peut être considérée comme la somme géométrique des trois segments. Le premier dont les composantes suivant les axes sont : $-y\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{xd\omega}{dt}$ a pour valeur absolue $r\frac{d\omega}{dt}$ et sa direction est celle d'une perpendiculaire à IM faisant avec IM l'angle $+\frac{\pi}{2}$ si $\frac{d\omega}{dt} > o$

Le deuxième dont les composantes suivant les axes sont $-\omega^2 x$, $-\omega^2 y$ a pour valeur absolue $\omega^2 r$ et sa direction est la direction MI. Enfin le troisième a pour projections sur les axes 0 et $-\omega$ V, sa direction est donc celle de la perpendiculaire commune à la base et à la roulante, du côté opposé au centre de courbure de la base si ω et V sont de même signe. En résumé :

$$(\gamma) = \left(\mathrm{IM}\,\frac{d\omega}{dt}\right) + (\omega^2 \mathrm{MI}) + (\omega \mathrm{V})$$

On retrouve bien la décomposition que nous avions établie (**57**) par des considérations géométriques.

71. Lieu des points du plan qui ont une accélération donnée. — A un instant donné, l'accélération étant supposée connue en grandeur et direction, ses projections sur les axes auront des valeurs C et C'. Par suite :

$$\gamma_x = \mathrm{C}$$
$$\gamma_y = \mathrm{C}'$$

Si dans ces formules on regarde x et y comme coordonnées courantes, elles représentent deux droites qui ne sont jamais parallèles car le déterminant des coefficients de x et de y dans les deux équations précédentes est $\omega^4 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ qui est différent de 0, sauf dans le cas exceptionnel où la vitesse angulaire et sa dérivée s'annulent à la fois. Donc à l'instant considéré il existe un point de la figure mobile qui a une accélération donnée.

72. Lieu des points ayant une accélération normale

nulle. — La normale à la trajectoire du point M est la droite MI et les cosinus directeurs de cette direction sont $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$. Par suite le lieu des points ayant une accélération normale nulle est :

$$x\gamma_x + y\gamma_y = 0$$

ou :

$$-\omega^2(x^2 + y^2) - \omega V y = 0$$

C'est une circonférence passant par l'origine des coordonnées et ayant pour tangente en ce point l'axe des x. Son second point de rencontre avec l'axe des y a pour ordonnée $-\frac{V}{\omega}$. Cette circonférence n'est donc autre que la circonférence des inflexions.

73. Lieu des points dont l'accélération tangentielle est nulle. — La tangente à la trajectoire du point M est une perpendiculaire à IM, elle a pour cosinus directeurs $\frac{y}{r}$ et $-\frac{x}{r}$. Par suite le lieu des points ayant une accélération tangentielle nulle a pour équation :

$$y\gamma_x - x\gamma_y = 0$$

ou :

$$-(x^2+y^2)\frac{d\omega}{dt} + \omega V x = 0$$

C'est une circonférence passant par l'origine des coordonnées et ayant pour tangente en ce point l'axe des y. Elle rencontre la première en un point autre que l'origine. Donc il existe à un instant donné un point et un seul ayant une accélération nulle.

Supposons la vitesse angulaire de la figure constante ou plus généralement stationnaire à l'instant considéré $\frac{d\omega}{dt} = 0$ et la seconde circonférence se réduit à l'axe y. Le point d'accélération nulle dans ce cas est donc le point J diamétralement opposé au centre instantané dans la circonférence des inflexions.

CHAPITRE V

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE

74. On peut regarder le point fixe O comme le centre d'une sphère fixe de rayon arbitraire et imaginer une seconde sphère de même centre que la première, de même rayon, et entraînée dans le mouvement du corps solide. Cette dernière ne peut évidemment que glisser sur la première.

Si on trace une figure quelconque sur la sphère mobile, cette figure vient, sur la sphère fixe, occuper différentes positions. Pour s'assurer que le corps solide vient occuper une position déterminée dans l'espace, il suffit de vérifier que deux points A et B de la sphère mobile sont amenés en coïncidence avec leurs homologues. En effet le point O étant fixe on peut le regarder comme étant à lui-même son homologue. Par suite lorsque A et B coïncideront avec leurs homologues A′, B′, les deux positions du corps auront en commun trois points homologues. Elles coïncideront donc d'après ce que nous avons vu (**42**). Il faut toutefois que les trois points A, O, B, ne soient pas en ligne droite, c'est-à-dire que A et B

ne soient pas aux extrémités d'un même diamètre de la sphère fixe.

75. Théorème. — On peut passer d'une position Σ d'un corps solide à une autre position Σ′ par une rotation autour d'un certain axe convenablement choisi passant par le point fixe.

Pour démontrer ce théorème nous allons faire voir que de cette manière deux points A et B de la sphère mobile dans la position Σ peuvent être amenés en coïncidence avec leurs homologues A′,B′ de la position Σ′. Supposons donc qu'il existe une droite telle que par une rotation du corps solide autour de cette droite, A′, B′ viennent en coïncidence avec A et B. Cette droite est par suite à égale distance de A et A′, elle appartient donc au plan perpendiculaire à AA′ en son milieu. La trace de cette droite sur la sphère fixe est par suite située sur le grand cercle perpendiculaire à AA′ en son milieu. Pour la même raison elle appartient au grand cercle perpendiculaire sur le milieu de BB′. L'intersection C de ces deux grands cercles est donc la trace sur la sphère fixe de l'axe de rotation. Je dis que par une rotation autour de OC on peut établir la coïncidence des deux figures. En effet joignons le point C aux points A, B, A′, B′ par des arcs de grand cercle. Les deux triangles sphériques ACB, A′C′B′ ont les trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles aux sommets de ces triangles sont donc égaux. Par suite si CA vient en coïncidence avec CA′, CB viendra également en coïncidence avec CB′ et les deux figures ayant trois points homologues communs coïncideront dans toute leur étendue.

De cette proposition résultent les suivantes.

Si l'on considère les droites qui joignent deux à deux les

points homologues, les plans perpendiculaires sur les milieux de ces droites passent tous par une même droite OC. On peut ajouter que si de deux points homologues quelconques on abaisse des perpendiculaires sur l'axe de rotation, ces perpendiculaires sont égales et tombent en un même point de l'axe.

Pour passer d'une position d'un corps solide à une autre position on a dû tourner d'un certain angle $\Delta\alpha$ autour de OC et l'on peut prendre, pour mesurer cet angle, l'angle de deux plans homologues quelconques passant par OC.

Supposons maintenant deux positions d'un corps solide séparées par un intervalle de temps infiniment petit. De ce qui précède il résulte que :

A un instant quelconque les plans normaux aux trajectoires des différents points du corps solide vont passer par une même droite que l'on appelle l'axe instantané de rotation du corps solide. On peut ajouter que le déplacement linéaire d'un point quelconque A dans l'intervalle de temps Δt peut être confondu, en négligeant un infiniment petit du troisième ordre, avec l'arc de cercle ayant pour rayon la distance du point A à l'axe et pour angle au centre l'angle $\Delta\alpha$. Par suite :

$$v = \text{limite}\, r\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = r\omega$$

La direction de cette vitesse est la direction limite de AA'. C'est par suite une perpendiculaire au plan déterminé par l'axe instantané et le point mobile.

Il en résulte qu'à un instant quelconque les vitesses de tous les points du corps solide sont les mêmes que si le corps solide tournait avec une vitesse angulaire ω autour d'une certaine droite passant par le point fixe.

76. Représentation du mouvement par le roulement de deux courbes sphériques l'une sur l'autre. — Le mouvement peut aussi se représenter par le roulement de deux courbes sphériques l'une sur l'autre ou d'un cône sur un cône.

Soient Σ_1, Σ_2, Σ_3. Σ_4, des positions du corps mobile séparées par des intervalles de temps finis, et C_1, C_2, C_3, C_4 (*fig.* 82) les traces sur la sphère fixe des axes de rotation correspondants : on passe de l'une de ces positions à la suivante par une rotation autour des axes OC_1, OC_2. OC_3, OC_4. En reliant par des arcs de grand cercle les points C_1, C_2, C_3, C_4, on forme un certain polygone sphérique $C_1C_2C_3C_4$. Si on suppose alors que le corps mobile, partant de la position Σ_4, revienne à la position Σ_3, par une rotation autour de OC_3, le point C_4, supposé marqué sur la sphère mobile, vient se placer en un point C'_4. De même, si le corps mobile passe de Σ_3 à Σ_2, les points C_3, C'_4, viendront en C'_3, C''_4, et si enfin il revient à Σ_1, les points C_2, C'_3, C''_4 se placeront en C'_2, C''_3, C'''_4. En joignant C_1, C'_2, C''_3, C'''_4 par des arcs de grand cercle, on a un deuxième polygone sphérique tracé sur la sphère mobile : il est obtenu en marquant sur cette sphère les points C à l'instant où ils appartiennent réellement à l'axe de rotation. Ces deux polygones

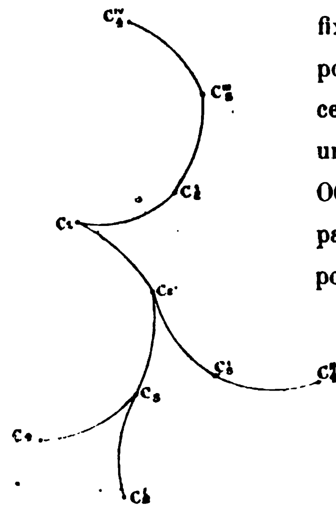


Fig. 82.

$C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ et $C_1\ C_2'\ C_3''\ C_4'''$ sont composés de côtés égaux chacun à chacun qui, après chaque rotation, viennent s'appliquer l'un sur l'autre.

Si l'on considère une suite continue de positions Σ séparées par des intervalles de temps infiniment petits, les polygones $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ et $C_1\ C_2'\ C_3''\ C_4'''$ deviennent deux courbes sphériques ; la première est le lieu des traces de l'axe instantané sur la sphère fixe, la seconde le lieu des traces des axes instantanés supposées marquées sur la sphère mobile aux époques où ces axes sont réellement axes de rotation. Ces deux courbes sont tangentes puisque les polygones dont elles sont les limites avaient constamment un côté commun ; de plus la courbe mobile roule sans glisser sur la courbe fixe : elles ont, en effet, leurs éléments linéaires égaux à chaque instant de même que les côtés des polygones étaient égaux chacun à chacun. Ces deux courbes seront appelées *base* et *roulante*. Elles sont les directrices de deux cônes de sommet O, lieux des axes instantanés dans l'espace et dans le corps mobile, qui roulent aussi sans glissement l'un sur l'autre.

Le mouvement d'un corps solide qui a un point fixe, présente donc, grâce à la considération de ces deux sphères, la plus grande analogie avec le mouvement d'une figure plane dans son plan ; cette analogie se poursuivra dans toutes les propriétés de ce mouvement, sauf dans celle qui concerne le point d'accélération nulle, comme nous le verrons dans la suite. Deux remarques préliminaires vont nous permettre d'établir les formules relatives aux rayons de courbure de la base et de la roulante.

77. Remarque I. — Dans le mouvement d'un corps ayant

un point fixe, l'angle de rotation $\Delta\alpha$, correspondant à l'intervalle de temps infiniment petit Δt, peut se mesurer par l'angle de deux grands cercles homologues ne passant pas par l'axe de rotation, à condition que les distances de ces deux cercles à la trace de l'axe sur la sphère soient infiniment petites, d'un ordre au moins égal à celui de $\Delta\alpha$ et de Δt.

Soient D, D' (*fig.* 83) les grands cercles considérés, A leur intersection, C la trace de l'axe de rotation sur la sphère, CP, CP' les distances de C à D et D'. Les arcs de grand cercle CP, CP' sont homologues, puisqu'après la rotation ils coïncident ; leur angle est donc rigoureusement égal à $\Delta\alpha$. Si l'on suppose les distances CP, CP' du premier ordre ainsi que $\Delta\alpha$ et Δt, l'aire du quadrilatère CPAP', qui a deux côtés infiniment petits, sera du second ordre.

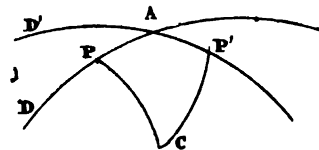


Fig. 83.

Or, cette aire a pour valeur l'excès sphérique du quadrilatère, c'est-à-dire l'excès de la somme de ses angles sur quatre angles droits :

$$\text{aire CPAP}' = \Delta\alpha + P + P' + A - 4dr$$

Or, en appelant $\Delta\varepsilon$ l'angle de D et D', on a :

$$A = 2dr - \Delta\varepsilon$$

et par suite :

$$\text{aire CPAP}' = \Delta\alpha + P + P' + 2dr - \Delta\varepsilon - 4dr$$

Mais les angles P et P' sont droits et l'on a enfin :

$$\text{aire CPAP}' = \Delta\alpha - \Delta\varepsilon$$

La différence

$$\Delta\alpha - \Delta\varepsilon$$

est donc, comme l'aire CPAP′, du second ordre, c'est-à-dire que l'on a bien :

$$\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}$$

ce qui démontre la proposition.

78. Remarque II. — Si, dans un triangle sphérique ABC, deux angles, B, C sont infiniment petits et si le troisième A tend vers deux droits, le supplément ε de A vérifie la relation :

$$\varepsilon^2 = B^2 + C^2 + 2B.C \cos \widetilde{BC}$$

En effet, en appelant a, b, c les côtés d'un triangle opposés aux angles A, B, C, on a comme on sait la relation :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

On en déduit, en appliquant au triangle supplémentaire :

$$- \cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a$$

ce qui s'écrit, puisque ε est le supplément de A :

$$\cos \varepsilon = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos \widetilde{BC}$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second, cette relation s'écrit :

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2} = \left(1 - \frac{B^2}{2}\right)\left(1 - \frac{C^2}{2}\right) - B.C \cos \widetilde{BC}$$

ou :

$$\varepsilon^2 = B^2 + C^2 + 2\,B.C \cos \widehat{BC}$$

79. Relation entre la vitesse angulaire, la vitesse de roulement et les rayons de courbure sphériques de la base et de la roulante. — Soient I (*fig.* 84) le point de contact de la base et de la roulante à l'époque considérée, A le point de la base qui devient centre instantané à l'époque $t + \Delta t$, A′ le point de la roulante qui coïncide avec A à l'époque $t + \Delta t$. Les grands cercles normaux en A et A′ à la base et à la roulante coupent en C et C′ le grand cercle perpendiculaire en I à la base et à la roulante ; quand Δt est infiniment petit, les points C et C′ tendent vers deux positions limites c et c' ; Ic et Ic' sont les rayons de courbure sphériques ρ et ρ' de la base et de la roulante. Les grands cercles CA, C′A′ sont homologues puisqu'ils coïncident à l'époque $t + \Delta t$; leur angle $\Delta\varepsilon$ peut être pris pour angle de rotation dans l'intervalle Δt puisque les distances de ces cercles au point I sont du même ordre que IA, IA′, c'est-à-dire du premier ordre (77). On a donc :

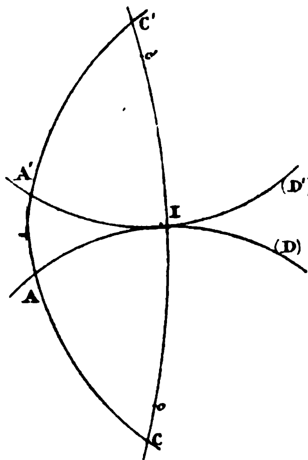


Fig. 84.

$$\lim \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \omega$$

L'angle $\Delta\varepsilon$ vérifie la relation (**78**) :

$$\Delta\varepsilon^2 = C^2 + C'^2 + 2C.C' \cos \widehat{CC'}$$

ou :

$$\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{C}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{C'}{\Delta s}\right)^2 + 2\left(\frac{C}{\Delta s}\right)\left(\frac{C'}{\Delta s}\right) \cos CC'$$

Or on a, à la limite :

$$\lim \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} = \frac{\omega}{V}$$

$$\lim \frac{C}{\Delta s} = \lim \frac{\sin ACI}{\sin AI} = \lim \frac{\sin CAI}{\sin IC} = \frac{1}{\sin \rho}$$

et de même :

$$\lim \frac{C'}{\Delta s} = \frac{1}{\sin \rho'}$$

La relation considérée s'écrit donc :

$$\frac{\omega^2}{V^2} = \frac{1}{\sin^2 \rho} + \frac{1}{\sin^2 \rho'} + \frac{2 \cos(\rho + \rho')}{\sin \rho \sin \rho'}$$

ou, en introduisant les cotangentes :

$$\frac{\omega^2}{V^2} = (\cot \rho + \cot \rho')^2$$

ou enfin :

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{tg\,\rho} + \frac{1}{tg\,\rho'}$$

En extrayant la racine carrée le signe — est certainement à rejeter, car, en supposant la figure de dimensions très petites, on peut sensiblement la regarder comme contenue dans le plan tangent en I à la sphère ; elle est alors plane, et la formule doit se réduire à celle des figures planes (**48**).

En supposant les concavités de même sens et la roulante enveloppant la base, on aurait trouvé :

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{tg\,\rho} - \frac{1}{tg\,\rho'}$$

C'est cette formule qu'il convient de regarder comme générale en faisant des conventions de signe identiques à celles établies dans le chapitre précédent (48).

Cette formule a d'importantes applications ; si, en particulier, le mouvement provient du roulement d'un cône de révolution sur un autre cône de révolution, ρ et ρ' étant constants, $\frac{\omega}{V}$ est aussi constant ; c'est une propriété fondamentale de ce mouvement utilisée dans les engrenages coniques.

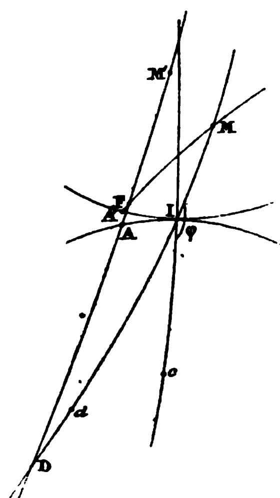


Fig. 85.

80. Relation donnant le rayon de courbure de la trajectoire d'un point du corps mobile. — Soit M (*fig.* 85) un point du corps mobile ; considérons la sphère qui a pour centre le point fixe O et passe par le point M. Soient, sur cette sphère, I le point de contact de la base et de la roulante, qui est la trace de l'axe instantané à l'époque t considérée, A la position que vient occuper I sur la base à l'époque $t + \Delta t$, A' le point de la roulante qui coïncide avec A à l'époque $t + \Delta t$.

Le grand cercle MI est normal à la trajectoire de M; soit φ l'angle de IM avec IC, grand cercle normal en I à la base et à la roulante, dirigé vers le centre de courbure C de la base. M' étant la position de M à l'époque $t+\Delta t$, le grand cercle M'A est normal en M' à la trajectoire de M ; il est homologue du grand cercle MA', puisqu'il coïncide avec lui à l'époque $t+\Delta t$. Soit F leur intersection. Ces deux grands cercles MA', M'A sont à une distance de I qui est, en général, infiniment petite du même ordre que Δt; si on appelle $\Delta\varepsilon$ leur angle, on a par suite (**77**) :

$$\lim \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \omega$$

Le grand cercle M'A coupe le grand cercle MI en un point D, qui, lorsque Δt est infiniment petit, a une position limite d, appelée centre de courbure sphérique de la trajectoire de M. Les deux angles M et D du triangle MFD sont infiniment petits et l'angle F tend vers 180° quand Δt est infiniment petit ; on a donc (**78**) :

$$\Delta\varepsilon^2 = M^2 + D^2 + 2M.D \cos MD$$

ou :

$$\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{M}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{D}{\Delta s}\right)^2 + 2\frac{M}{\Delta s}\cdot\frac{D}{\Delta s}\cos MD$$

Or, on a à la limite :

$$\lim \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} = \frac{\omega}{V}$$

$$\lim \frac{M}{\Delta s} = \lim \frac{\sin M}{\sin A'I} = \lim \frac{\sin MA'I}{\sin IM} = \frac{-\cos\varphi}{\sin IM}$$

$$\lim \frac{D}{\Delta s} = \lim \frac{\sin D}{\sin AI} = \lim \frac{\sin DAI}{\sin ID} = \frac{-\cos\varphi}{\sin Id}$$

La relation considérée s'écrit donc :

$$\frac{\omega^2}{V^2} = \cos^2\varphi \left[\frac{1}{\sin^2 IM} + \frac{1}{\sin^2 Id} + \frac{2\cos(IM + Id)}{\sin IM . \sin Id}\right]$$

On en déduit, comme précédemment (**79**), et avec les mêmes conventions de signe que pour les figures planes (**49**):

$$\frac{\omega}{V} = \cos\varphi \left(\frac{1}{\operatorname{tg} Id} - \frac{1}{\operatorname{tg} IM}\right)$$

81. Relation donnant le rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe sphérique liée au corps mobile. — Le point de contact d'une courbe sphérique liée au corps mobile avec son enveloppe est l'intersection de cette courbe avec un grand cercle qui lui est mené normalement par la trace de l'axe instantané ; la vitesse du point de contact ne peut être, en effet, dirigée que suivant la tangente commune à la courbe et à son enveloppe : on l'établit par le même raisonnement que pour l'enveloppe des figures planes (**47**). Considérons la sphère sur laquelle est tracée la courbe S (*fig.* 86) liée au corps mobile. Les points I, A, A', C étant obtenus comme précédemment (**80**), menons par I le grand cercle IM normal à S et par A' le grand cercle A'F normal

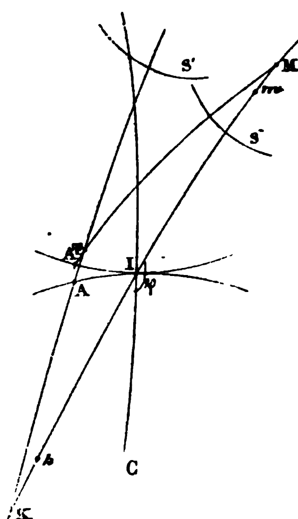


Fig. 86.

aussi à S ; ces deux cercles se coupent en un point M, dont la position limite m, quand Δt est infiniment petit, est le centre de courbure sphérique de S. Le grand cercle mené par A normalement à S′ rencontre S′ en un point qui est le point de contact de la courbe et de son enveloppe à l'époque $t + \Delta t$; il est donc normal à cette enveloppe, et, par suite, le point K, où il rencontre le grand cercle IM, tend vers une position limite k qui est le centre de courbure de l'enveloppe de S. Les deux grands cercles KA et A′M sont d'ailleurs homologues, puisqu'ils coïncident à l'époque $t + \Delta t$. Soit F leur point d'intersection et $\Delta\varepsilon$ leur angle. En appelant φ l'angle avec IC du cercle IM dirigé vers le centre de courbure de la courbe mobile, on obtient, par un calcul déjà indiqué (**80**) la relation :

$$\frac{\omega}{V} = \cos\varphi \left(\frac{1}{\operatorname{tg} Ik} - \frac{1}{\operatorname{tg} Im}\right)$$

82. Construction géométrique déduite de la cons-

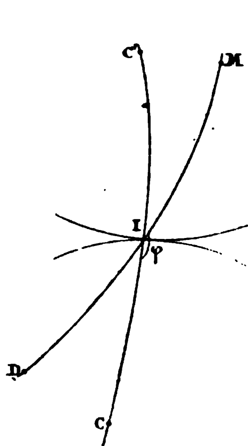


Fig. 87.

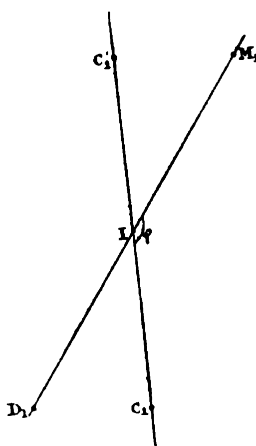


Fig. 88.

truction de Savary. — Soient I (*fig.* 87) le point de contact de la base et de la roulante tracées sur une sphère passant par un point quelconque M du corps solide, CIC′ le grand cercle normal à ces deux courbes ; le centre de courbure D de la trajectoire de M se trouve sur le grand cercle IM. Effectuons une projection stéréographique de la figure sur le plan tangent en I, en prenant le centre O de cette sphère pour point de vue. Nous obtenons une figure plane (*fig.* 88) dans laquelle les arcs de grand cercle issus de I sont représentés par des droites, les angles de ces arcs de grand cercle étant conservés et leurs longueurs étant remplacées par celles de leurs tangentes trigonométriques. Or, les éléments de cette figure satisfont à la relation :

$$\frac{1}{IC_1} - \frac{1}{IC_1'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{ID_1} - \frac{1}{IM_1}\right)$$

qui est précisément celle qui sert de point de départ à la construction de Savary (**52**). Cette construction permettra donc d'obtenir le point D_1 d'où l'on déduira le point D. La même méthode s'applique à la recherche du centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe sphérique.

83. Théorie analytique du mouvement d'un corps solide ayant un point fixe. — Le calcul permet de compléter la théorie du mouvement d'un corps solide ayant un point fixe et d'étudier l'accélération dans un tel mouvement.

Soient Ox, Oy, Oz un système d'axes fixes ayant pour origine le point fixe O, et OX, OY, OZ un système d'axes mobiles, de même origine, liés au corps solide et entraînés dans son mouvement, qui font avec les premiers des angles dont les

cosinus sont contenus dans le tableau suivant :

	OX	OY	OZ
Ox	α	α'	α''
Oy	β	β'	β''
Oz	γ	γ'	γ''

Les formules de transformation sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z \end{aligned} \right.$$

et l'on a les relations :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \end{aligned} \right.$$

Si on suppose le mouvement défini, les neuf cosinus sont des fonctions déterminées du temps t ; leurs dérivées satisfont aux équations suivantes déduites des équations (3) :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} &= -\left(\alpha' \frac{d\alpha''}{dt} + \beta' \frac{d\beta''}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma''}{dt}\right) = p \\ \alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt} &= -\left(\alpha'' \frac{d\alpha}{dt} + \beta'' \frac{d\beta}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma}{dt}\right) = q \\ \alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt} &= -\left(\alpha \frac{d\alpha'}{dt} + \beta \frac{d\beta'}{dt} + \gamma \frac{d\gamma'}{dt}\right) = r \end{aligned} \right.$$

La valeur commune des deux membres dans chacune de ces équations a été désignée, pour abréger, par les lettres p, q, r. En différentiant la première équation (2) et lui joignant les deux dernières équations (4), on obtient le système :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}=0\\ &\alpha'\frac{d\alpha}{dt}+\beta'\frac{d\beta}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma}{dt}=r\\ &\alpha''\frac{d\alpha}{dt}+\beta''\frac{d\beta}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma}{dt}=-q\end{aligned}\right.$$

On en déduit, en mulpliant par α, α', α'', puis par β, β', β'' et γ, γ', γ'' et ajoutant membre à membre, les relations :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt}=r\alpha'-q\alpha''\\ &\frac{d\beta}{dt}=r\beta'-q\beta''\\ &\frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma''\end{aligned}\right.$$

En réunissant de même les équations analogues à (5) contenant $\frac{d\alpha'}{dt}$, $\frac{d\beta'}{dt}$, $\frac{d\gamma'}{dt}$ puis $\frac{d\alpha''}{dt}$, $\frac{d\beta''}{dt}$, $\frac{d\gamma''}{dt}$, on a les deux systèmes suivants analogues au précédent :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha'}{dt}=p\alpha''-r\alpha\\ &\frac{d\beta'}{dt}=p\beta''-r\beta\\ &\frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha''}{dt} &= q\alpha - p\alpha' \\ \frac{d\beta''}{dt} &= q\beta - p\beta' \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma' \end{aligned} \right.$$

Ces relations préliminaires étant établies, calculons les composantes de la vitesse d'un point M déterminé du corps mobile de coordonnées X, Y, Z. On les obtient en différentiant les équations (1) ; elles ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt} \end{aligned}$$

ou, d'après les formules démontrées :

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha\,(qZ - rY) + \alpha'\,(rX - pZ) + \alpha''\,(pY - qX) \\ \frac{dy}{dt} &= \beta\,(qZ - rY) + \beta'\,(rX - pZ) + \beta''\,(pY - qX) \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma\,(qZ - rY) + \gamma'\,(rX - pZ) + \gamma''\,(pY - qX) \end{aligned} \right.$$

On a des expressions plus simples en projetant la vitesse sur les axes mobiles ; les composants V_X, V_Y, V_Z suivant ces axes ont pour valeurs :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} V_X &= qZ - rY \\ V_Y &= rX - pZ \\ V_Z &= pY - qX \end{aligned} \right.$$

car, pour projeter sur les axes fixes le segment qui a pour composantes suivant les axes mobiles V_X, V_Y, V_Z, il faut multiplier V_X, V_Y, V_Z par α, α', α'' puis par β, β', β'' et γ, γ', γ'' et ajouter les résultats obtenus : ce qui conduit bien aux expressions (9) trouvées pour $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Ces formules représentent les projections sur les axes mobiles du moment par rapport au point mobile d'un segment ayant pour origine l'origine des coordonnées, pour extrémité le point dont les coordonnées par rapport aux axes mobiles sont p, q, r.

La vitesse d'un point quelconque du corps solide est donc la même que si le corps tournait à l'instant considéré avec une vitesse angulaire de valeur

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

autour d'une certaine droite passant par le point fixe et dont les équations par rapport aux axes mobiles sont :

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r}$$

Au lieu de définir ce segment par rapport aux axes mobiles, on peut le définir par rapport aux axes fixes. A cet effet, remarquons que le point dont les coordonnées sont p, q, r par rapport aux axes mobiles a pour coordonnées par rapport aux axes fixes :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \alpha p + \alpha' q + \alpha'' r \\ q_1 &= \beta p + \beta' q + \beta'' r \\ r_1 &= \gamma p + \gamma' q + \gamma'' r \end{aligned} \right.$$

Par suite :

$$(12)\qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = q_1 z - r_1 y \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = r_1 x - p_1 z \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = p_1 y - q_1 x \end{cases}$$

On en conclut que la vitesse d'un point quelconque du corps solide est la même que si, à l'instant considéré, le corps tournait avec une vitesse angulaire de valeur

$$\omega = \sqrt{p^2_1 + q^2_1 + r^2_1}$$

autour d'une certaine droite, dont les équations par rapport aux axes fixes sont :

$$\frac{x}{p_1} = \frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1}$$

Les positions successives de l'axe instantané dans l'espace et dans le corps solide forment deux cônes qui ont constamment une génératrice commune. De plus, ils sont tangents suivant cette génératrice et roulent sans glisser l'un sur l'autre.

En effet, considérons un déplacement infiniment petit du corps correspondant à un intervalle de temps Δt. Les variations dp_1, dq_1, dr_1 éprouvées par p_1, q_1, r_1 sont :

$$(13)\qquad \begin{cases} dp_1 = \alpha dp + \alpha' dq + \alpha'' dr \\ dq_1 = \beta dp + \beta' dq + \beta'' dr \\ dr_1 = \gamma dp + \gamma' dq + \gamma'' dr \end{cases}$$

ainsi qu'on s'en assure en différentiant les équations (11) et ayant égard aux équations (6), (7) et (8).

L'interprétation géométrique de ces formules va nous conduire à la proposition énoncée. Figurons en OR (*fig.* 89) l'axe instantané de rotation de l'époque t limité de façon que les coordonnées du point R soient p, q, r par rapport aux axes mobiles de l'époque considérée et par suite p_1, q_1, r_1 par rapport aux axes fixes.

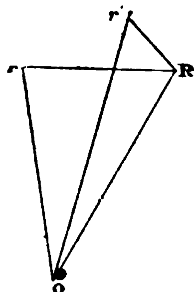


Fig. 89.

A l'époque $t + \Delta t$, cet axe occupe une position Or telle que les coordonnées du point r sont par rapport aux axes fixes $p_1 + dp_1$, $q_1 + dq_1$, $r_1 + dr_1$. Figurons en Or' la droite du corps solide qui, à l'époque $t + \Delta t$, coïncidera avec Or et considérons les deux segments Rr', Rr. Rr' représente le déplacement dans le corps solide de l'extrémité de l'axe instantané pendant l'intervalle de temps Δt. Donc Rr' a pour projections sur les axes mobiles, supposés fixes pendant l'intervalle de temps Δt, dp, dq, dr. Il est vrai qu'en réalité ces axes sont mobiles ; mais en les supposant fixes, on ne néglige qu'un infiniment petit d'un ordre supérieur à celui de Δt. Rr représente le déplacement de l'extrémité de l'axe instantané dans l'espace. Donc ce segment a pour projections sur les axes fixes dp_1, dq_1, dr_1.

Les formules précédentes nous montrent que les segments Rr et Rr' coïncident en grandeur et direction, ce qui démontre bien que les deux cônes sont constamment tangents et qu'ils roulent sans glisser l'un sur l'autre.

84. Accélération d'un point quelconque du corps solide. — Les composantes de l'accélération d'un point quel-

conque M du corps solide sont, en désignant par x, y, z ses coordonnées par rapport aux axes fixes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dq_1}{dt} z - \frac{dr_1}{dt} y + q_1 \frac{dz}{dt} - r_1 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dr_1}{dt} x - \frac{dp_1}{dt} z + r_1 \frac{dx}{dt} - p_1 \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dp_1}{dt} y - \frac{dq_1}{dt} x + p_1 \frac{dy}{dt} - q_1 \frac{dx}{dt}$$

Ces formules montrent que l'accélération peut être considérée comme la résultante de deux segments, l'un ayant pour composantes :

$$z \frac{dq_1}{dt} - y \frac{dr_1}{dt} \qquad x \frac{dr_1}{dt} - y \frac{dp_1}{dt} \qquad y \frac{dp_1}{dt} - x \frac{dq_1}{dt}$$

l'autre :

$$q_1 \frac{dz}{dt} - r_1 \frac{dy}{dt} \qquad r_1 \frac{dx}{dt} - p_1 \frac{dz}{dt} \qquad p_1 \frac{dy}{dt} - q_1 \frac{dx}{dt}$$

La première composante n'est autre que le moment du segment OA par rapport au point mobile, l'origine O du segment coïncidant avec l'origine des coordonnées et son extrémité A avec le point dont les coordonnées par rapport aux axes fixes sont $\frac{dp_1}{dt}, \frac{dq_1}{dt}, \frac{dr_1}{dt}$.

Cette première composante a reçu le nom d'accélération angulaire. Pour justifier cette dénomination, remarquons que si la rotation s'effectue autour d'un axe permanent avec une vitesse angulaire constante, p_1, q_1, r_1 sont constants; OA est donc nul. Par suite, OA mesure la rapidité avec laquelle change la vitesse angulaire.

La deuxième composante représente l'accélération du point M dans l'hypothèse où le mouvement du corps solide devient une rotation uniforme autour d'un axe permanent. En effet, prenons comme axe des z l'axe instantané de rotation de l'époque considérée, pour plan des xz et des xy deux plans passant par le point M. Alors $p_1 = q_1 = 0$, $r_1 = \omega$, $y = z = 0$. Les composantes de l'accélération deviennent alors :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

Par suite, la deuxième composante est égale à MP. ω^2 (*fig.* 90), P désignant le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe instantané de rotation, et elle est dirigée suivant MP. Elle est donc bien la même que si la rotation du corps solide était uniforme et se faisait autour d'un axe permanent.

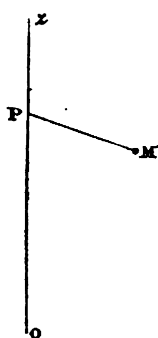


Fig. 90.

Nous avons exprimé p, q, r en fonction de neuf cosinus et de leurs dérivées, mais ces neuf cosinus ne sont pas arbitraires. Il n'y en a que trois qui soient indépendants. Il est quelquefois préférable dans certaines questions d'exprimer p, q, r en fonction de trois quantités indépendantes les unes des autres. On arrive facilement à ce résultat au moyen des angles d'Euler.

Soient ox, oy, oz un système d'axes fixes et oXYZ un système d'axes mobiles (*fig.* 91). Représentons les intersections des plans de coordonnées avec une sphère de rayon 1 ; soit oN l'intersection des deux plans xoy et XoY. Pour définir les axes mo-

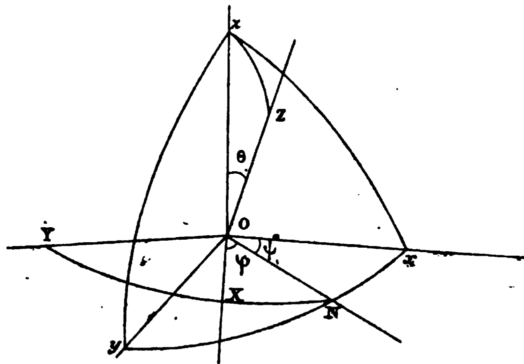


Fig. 91.

biles par rapport aux axes fixes, nous désignerons par ψ l'angle xoN compté positivement dans le sens de ox vers oy, par φ l'angle NoX compté positivement dans le sens de oX vers oY et enfin par θ l'angle zoZ. Au moyen de ces trois angles, on peut évaluer les cosinus des angles que font les directions oX, oY, oZ avec les directions ox, oy, oz.

Considérons en effet successivement les triangles sphériques XNx, YNx, ZNx; ils donnent :

$$\alpha = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta$$
$$\alpha' = - \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta$$
$$\alpha'' = \sin\psi \sin\theta$$

De même, en considérant les triangles sphériques XNy, YNy,

ZNy, on obtient :

$$\beta = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta$$
$$\beta' = -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta$$
$$\beta'' = -\cos\psi \sin\theta$$

Enfin, en considérant les triangles sphériques XNz, YNz, ZNz, on a :

$$\gamma = \sin\varphi \sin\theta$$
$$\gamma' = \cos\varphi \sin\theta$$
$$\gamma'' = \cos\theta$$

Ces égalités permettent de calculer $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha'}{dt}, \frac{d\alpha''}{dt} \cdots\cdots$ en fonction des trois angles θ, ψ, φ et de leurs dérivées. En substituant ces valeurs dans p, q, r, on aurait ainsi évalué ces trois quantités en fonction des trois angles d'Euler et de leurs dérivées. Mais on peut arriver plus rapidement au résultat. A cet effet, rappelons quelques propriétés établies précédemment :

1° Si un point est animé simultanément de plusieurs vitesse, la vitesse résultante est la somme géométrique des vitesses partielles composées par la règle du polygone ;

2° Si un corps est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, la vitesse d'un point quelconque est égale au moment de la vitesse angulaire portée sur l'axe dans un sens convenable (22) ;

3° Le moment par rapport à un point quelconque de la somme géométrique de plusieurs segments ayant même origine est égal à la somme géométrique des moments de tous ces segments par rapport au même point (12).

Il résulte de là que, si un corps est animé d'une certaine

vitesse angulaire autour d'un axe, on peut le considérer comme animé de plusieurs vitesses autour d'axes rencontrant le premier pourvu que la somme géométrique des vitesses angulaires correspondant à chacun des axes et portées sur chacun d'eux soit égale en grandeur et direction à la vitesse angulaire totale.

Ces propositions rappelées, on peut réaliser un déplacement infiniment petit du corps solide en faisant varier les angles θ, ψ et φ de quantités elles-mêmes infiniment petites $\Delta\theta$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$. On peut donc considérer le corps solide comme animé simultanément de vitesses angulaires $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, autour des axes oN, oZ, oz. D'autre part, nous savons que les expressions des projections de la vitesse angulaire sur les axes oX, oY, oZ, sont p, q, r et, comme ces axes sont rectangulaires, on peut regarder chacune des composantes comme une projection orthogonale de la vitesse angulaire du corps solide portée sur l'axe de rotation. Or le tableau des cosinus de oX, oY, oZ avec oZ, oz, oN est:

	oX	oY	oZ
oZ	0	0	1
oz	$\sin\varphi \sin\theta$	$\cos\varphi \sin\theta$	$\cos\theta$
oN	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0

Par suite :

$$p = \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}$$

$$q = \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}$$

On ne pourrait faire sans changement le raisonnement inverse ; il n'est pas vrai, par exemple, que $\frac{d\psi}{dt}$ soit la projection de la vitesse sur ox. Cela tient à ce que les axes oZ, ox, oN ne sont pas deux à deux rectangulaires. Mais des formules précédentes on déduit :

$$\frac{d\theta}{dt} = p \cos\varphi - q \sin\varphi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\sin\theta} (p \sin\varphi + q \cos\varphi)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \operatorname{cotg}\theta \, (p \sin\varphi + q \cos\varphi)$$

formules souvent employées dans la théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

CHAPITRE VI

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE LIBRE

85. Les mouvements les plus simples qu'on puisse attribuer à un corps solide libre sont : un mouvement de translation et un mouvement de rotation.

Un mouvement de translation est un mouvement tel qu'on peut passer d'une position à une autre du corps solide en faisant décrire à tous les points du corps solide des segments égaux et parallèles. Un quelconque de ces segments peut représenter la translation. Il faut donc trois paramètres pour définir une translation.

Si on fixe deux points d'un corps solide, le seul mouvement que puisse prendre ce corps est un mouvement de rotation autour de la droite joignant les deux points. Dans un tel mouvement, tous les points du corps solide, autres que ceux situés sur l'axe, décrivent des cercles dont les plans sont perpendiculaires à l'axe. Il est nécessaire, pour faire connaître une rotation, de donner son angle, ainsi que la situation absolue de l'axe dans l'espace. Une rotation est donc déterminée par cinq paramètres.

86. Théorème. — Deux translations t, t', imprimées successivement à un corps solide, peuvent être remplacées par une translation unique, représentée par un segment égal à la somme géométrique des segments qui représentent les deux translations.

Ce théorème est évident.

Réciproque. — Une translation quelconque peut être décomposée en deux autres d'une infinité de manières; il suffit que les segments représentant ces translations aient une somme géométrique égale au segment représentant la première.

87. Théorème. — L'ensemble d'une translation t et d'une rotation r autour d'un axe perpendiculaire à la direction de la translation peut être remplacé par une rotation unique R autour d'un axe parallèle au premier, l'angle de la nouvelle rotation étant égal à celui de la première.

En effet, considérons un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation r et par suite parallèle à la translation t. Dans les deux mouvements effectués, ce plan ne fait que glisser sur lui-même. Si donc l'on considère la figure plane déterminée par l'intersection de ce plan avec le corps solide, elle se déplace dans son plan. On peut donc l'amener, par une rotation unique autour d'un certain point O du plan convenablement choisi, de sa position initiale à sa position finale. Si l'on imagine l'axe perpendiculaire au plan passant par le point O, par une rotation du corps solide autour de cet axe on amène trois points au moins du corps solide en coïncidence avec leurs homologues, ce qui démontre le théorème.

La manière même dont nous avons trouvé cet axe montre qu'il est parallèle à celui de la rotation r. S'il en était autrement, un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation r ne resterait

pas parallèle à lui-même pendant la rotation R. Il ne reprendrait sa direction qu'après une rotation complète de 360°. Dans ce cas, il n'y aurait pas eu de déplacement du corps solide et par suite pas de mouvement.

La rotation R est de même angle que la rotation r. En effet, considérons un plan parallèle à l'axe; dans la rotation r, il tourne d'un certain angle α. Dans la translation t, il reste parallèle à lui-même. Par suite, l'angle dont a tourné ce plan dans les mouvements de rotation et de translation est α. La rotation unique R est donc bien, elle aussi, d'un angle égal à α.

88. Construction de l'axe de la rotation unique. — Prenons pour plan de la figure un plan perpendiculaire à l'axe. Soit O (*fig.* 92) la trace de l'axe de la rotation r. La translation t amène ce point de O en O', et comme, dans la rotation, O' est fixe, O et O' sont deux points homologues. Le point cherché appartient donc à la perpendiculaire élevée au milieu de OO' et il se trouve sur cette droite en un point C tel que de ce point on voit le segment OO' sous un angle α. Comme les deux rotations sont de même sens, on sait par suite sur quel côté de la perpendiculaire doit se trouver le point C.

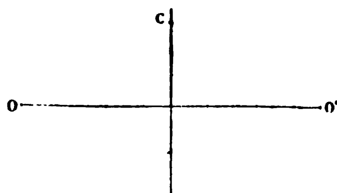


Fig. 92.

Réciproque. — Une rotation R peut être remplacée d'une infinité de manières par une rotation r, du même angle, autour d'un axe parallèle au premier et par une translation perpendiculaire à l'axe.

En effet, soient O (*fig.* 93) la trace sur le plan de la figure de l'axe de rotation unique R, C un point absolument arbitraire que nous considérerons comme la trace de l'axe de la nouvelle rotation *r*. Lorsqu'on effectue cette rotation O vient en O_1 ; or, dans la rotation R, O est un point fixe; il faut donc que la translation *t* ramène O_1 en O. Donc, à un point C arbitrairement choisi correspond une translation parfaitement déterminée.

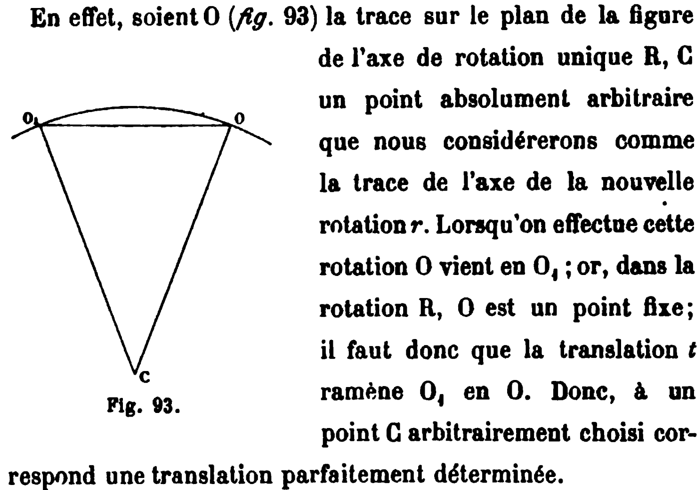


Fig. 93.

89. Mouvement héliçoïdal. — On sait que l'hélice est une courbe tracée sur un cylindre circulaire droit, telle que la distance d'un de ses points M à une section droite quelconque varie proportionnellement à l'arc de la section droite compris entre les génératrices qui passent par l'origine B et par le point M de l'hélice.

Cette définition rappelée, supposons que dans un corps solide une droite D ne fasse que glisser sur elle-même. Un point M quelconque du corps ne pourra se déplacer que sur un cylindre de révolution. Les seuls mouvements possibles de ce point sont une translation parallèle à l'axe du cylindre et une rotation autour de cet axe. Si ces deux mouvements sont simultanés et proportionnels, on dit que le mouvement est héliçoïdal.

90. Théorème. — L'ensemble d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe peut être remplacé par un mouvement héliçoïdal.

Il suffit, en effet, de supposer que ces deux mouvements s'accomplissent simultanément et proportionnellement au temps.

91. Théorème. — L'ensemble d'une rotation r et d'une translation t quelconque peut être remplacé par un mouvement héliçoïdal.

En effet, on peut considérer la translation t comme la somme géométrique de deux translations t' et t'', l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe. Or, d'après ce qui précède, l'ensemble de la translation t'' et de la rotation r équivaut à une rotation unique R autour d'un axe parallèle au premier ; l'ensemble de la rotation R et de la translation t' constitue un mouvement héliçoïdal.

92. Composition des rotations. — Théorème. — Deux rotations autour d'axes parallèles peuvent être remplacées par une rotation unique effectuée autour d'un axe parallèle aux axes des deux rotations considérées et dont l'angle est égal à la somme des angles de ces deux rotations.

Désignons par r, r' les deux rotations considérées, par α, α' les angles de ces rotations. Un plan quelconque P perpendiculaire aux axes de r et r' glisse sur lui-même pendant les deux rotations ; son intersection avec le corps solide est donc une figure plane S qui se déplace dans son plan, et on peut l'amener de sa position primitive à sa position finale par une rotation autour d'un point O de P (**44**). Cette même rotation, effectuée autour de la perpendiculaire élevée en O au plan P, amène le corps dans sa position finale puisque, dans ce mouvement, trois points du corps, pris arbitrairement sur S, viennent coïncider avec leurs homologues. Cette perpendiculaire au plan P, qui

est parallèle aux axes de r et r' est donc l'axe de la rotation unique R qui équivaut à r et r'. Pour trouver son angle, considérons un plan quelconque parallèle aux axes de r et r'; il tourne pendant les deux rotations r, r' successivement de l'angle α, puis de l'angle α', par rapport à sa position primitive. Sa position finale fait donc avec sa position primitive l'angle $\alpha + \alpha'$; l'angle de la rotation R, qui doit le faire tourner de la même quantité, est donc $\alpha + \alpha'$.

La position de l'axe de R est facile à déterminer. Prenons pour plan de la figure le plan P. Soient O (*fig.* 94) la trace sur ce plan de l'axe de r, et O′ le point qui, après la rotation r, devient la trace de l'axe de r'. Effectuons la rotation r; O′ vient en O_1, qui restera fixe pendant la rotation r'. Les points O′, O_1 sont donc homologues et la trace de l'axe de R est sur la bissectrice OA de $O'OO_1$. Effectuons maintenant la rotation r'; O tourne autour de O_1 et vient en O_2; les points O et O_2 sont homologues et la trace de l'axe de R est aussi sur la bissectrice O_1B de l'angle OO_1O_2; elle est donc au point I d'intersection de OA et de O_1B. D'ailleurs, l'angle de de la rotation R est égal au double de AIO_1, puisque IO_1 et IO′ sont homologues; or AIO_1, extérieur au triangle OO_1I a pour valeur $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$. L'angle de la rotation R est donc bien $\alpha + \alpha'$.

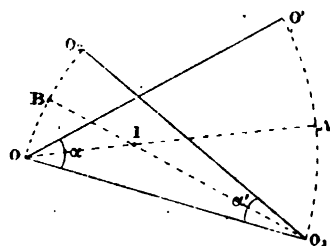


Fig. 94.

93. Théorème. — Deux rotations autour d'axes concou-

rants peuvent être remplacées par une rotation unique autour d'un axe passant par le point de rencontre des axes des rotations considérées.

Désignons par r, r' les deux rotations considérées, par α, α' les angles de ces rotations. Le point de concours C des axes de r et r' reste fixe pendant les deux rotations. Le corps solide a donc un point fixe et l'on peut passer de sa position initiale à sa position finale par une rotation R autour d'un axe passant par C (**75**).

La position de l'axe de R est facile à déterminer. Considérons une sphère ayant pour centre le point C (*fig.* 95). Soient sur cette sphère, O la trace de l'axe de r, O' le point qui, après la rotation r, devient la trace de l'axe de r'. Effectuons la rotation r ; O' vient en O_1, qui restera fixe pendant la rotation r'. Les points O', O_1 sont donc homologues et la trace de l'axe de R est sur le grand cercle OA bissecteur de l'angle $O'OO_1$. Effectuons maintenant la rotation r' ; O tourne autour de O_1 et vient en O_2 ; les points O, O_2 sont homologues et la trace de l'axe de R est aussi sur le grand cercle O_1B bissecteur de l'angle OO_1O_2 : elle est donc au point I d'intersection des grands cercles OA et O_1B. La position de I peut d'ailleurs être déterminée par sa longitude et sa latitude. Pre-

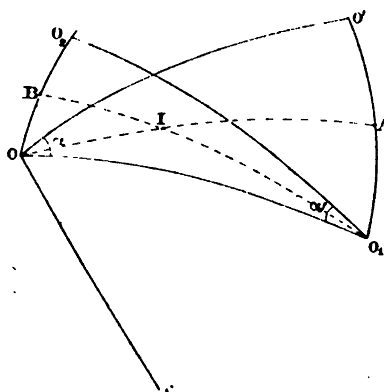


Fig. 95.

nons en effet le point O comme pôle et le grand cercle OO′ comme origine des longitudes ; la longitude de I est $\frac{\alpha}{2}$. Sa colatitude OI est un côté du triangle OIO_1, qu'on peut résoudre puisqu'on connait un côté OO_1, égal à OO′, et les deux angles adjacents $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha'}{2}$.

94. Théorème. — Deux rotations successives quelconques peuvent être remplacées par un mouvement héliçoïdal.

Soient D, D′ (*fig.* 96) les axes des deux rotations que nous désignerons par r, r'. Menons par un point quelconque de D, une droite D_1 parallèle à D′. La rotation r' peut être remplacée par une rotation de même angle r_1 autour de D_1 et une translation t perpendiculaire à D′ (**87**). Les deux rotations r, r_1 autour des axes concourants D, D_1 se composent alors en une seule R et les deux rotations primitives r, r' sont remplacées par une rotation R et une translation t, c'est-à-dire par un mouvement héliçoïdal (**91**).

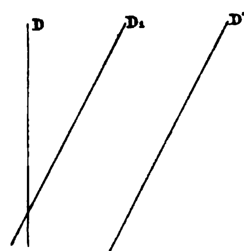


Fig. 96.

95. Théorème. — On peut passer d'une position d'un corps solide à une autre position quelconque par un mouvement héliçoïdal dont l'axe et l'angle de rotation sont déterminés.

Soient A, A′ deux points homologues dans les positions Σ, Σ′ du corps solide. Imprimons-lui une translation T définie par le segment AA′; soit Σ_1 la nouvelle position obtenue. Dans les deux positions Σ′, Σ_1 un point homologue est commun; c'est le point A′; on peut donc amener ces

deux positions à coïncider par une rotation R autour d'un axe passant par A'. Par suite, on peut passer de la position Σ à la position Σ' par la translation T et la rotation R, c'est-à-dire par un mouvement héliçoïdal (**91**). Cela revient à dire aussi que le passage de Σ à Σ' peut s'effectuer en supposant qu'une certaine droite du corps solide a été animée d'un simple glissement sur elle-même.

L'axe de ce mouvement héliçoïdal permettant de passer de Σ à Σ' est unique et son angle de rotation est déterminé. En effet :

1° Sa direction est déterminée. Car s'il existait deux axes de mouvement héliçoïdal H, H_1 non parallèles, le mouvement d'axe H laisserait un plan P, perpendiculaire à H, parallèle à lui-même ; tandis que le mouvement d'axe H_1 changerait la direction de P, excepté si ce mouvement comprenait une rotation nulle ou une rotation de 360° ; mais ces deux cas ne sont pas ceux d'un mouvement général et doivent être rejetés.

2° S'il existe deux axes de mouvement héliçoïdal H, H_1 parallèles, les angles α, α_1 des rotations autour de ces deux axes sont égaux. En effet, un plan parallèle à H et H_1 doit faire après le premier mouvement un angle α avec sa position initiale ; il doit faire ce même angle α avec sa position initiale après le second mouvement, et cela n'est possible que si $\alpha = \alpha_1$;

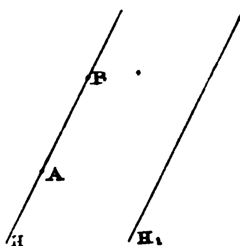


Fig. 97.

3° Il ne peut exister deux axes de mouvement héliçoïdal permettant de passer de Σ à Σ' ; supposons en effet qu'il existe deux tels axes H, H_1 (*fig.* 97); une simple transla-

tion suivant leur direction commune amène un point quelconque A de H à coïncider avec son homologue B ; une rotation achève le mouvement. Mais, par cette rotation, la droite H_1 qui devrait rester en coïncidence avec elle-même, se déplace. L'axe H_1 ne peut donc exister que si cette rotation n'a pas lieu, c'est-à-dire, dans le cas d'une translation et non dans celui d'un mouvement quelconque.

96. Vitesse d'un point quelconque du corps solide. — Soient deux positions M, M′ (*fig.* 98) d'un point quelconque du corps solide séparées par un in-tervalle de temps Δt. Soit D l'axe du mouvement héliçoïdal permettant de passer d'une position à l'autre ; pour aller de M en M′, on peut effectuer d'abord la rotation MM_1 d'angle $\Delta\alpha$ autour de D, puis la translation M_1 M′ parallèle à D. Cette rotation et cette translation sont d'ailleurs les mêmes pour tous les points du corps. On a :

Fig. 98.

$$(MM') = (MM_1) + (M_1M')$$

Ou, en faisant Δt infiniment petit :

$$\left(\lim \frac{MM'}{\Delta t}\right) = \left(\lim \frac{MM_1}{\Delta t}\right) + \left(\lim \frac{M_1M'}{\Delta t}\right)$$

Mais, en appelant r la distance MP du point M à l'axe ins-

tantané du mouvement hélicoïdal, position limite de D, et ω la vitesse angulaire commune à tous les points à l'époque t, on a :

$$\lim \frac{MM_1}{\Delta t} = MP. \lim \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = r\omega$$

De même :

$$\lim \frac{MM'}{\Delta t} = k$$

en désignant par k la vitesse de translation commune à tous les points à l'époque considérée.

La vitesse V de M a donc pour expression :

$$(V) = (r\omega) + (k)$$

la direction de la composante $r\omega$ étant perpendiculaire au plan MPD et son sens étant déterminé par le signe de ω, et la direction de k étant parallèle à l'axe D et de sens déterminé par le signe de k.

Il en résulte :

1° Que tous les points situés sur l'axe ont la même vitesse qui est la vitesse commune de translation ;

2° Que tous les points situés sur une même parallèle à l'axe ont des vitesses égales en grandeur et direction ;

3° Que tous les points situés sur un cylindre de révolution décrit autour de l'axe instantané ont des vitesses dont la grandeur arithmétique est la même ;

4° Que tous les points situés sur une droite rencontrant l'axe ont, s'ils sont très voisins de l'axe, une vitesse sensiblement parallèle à cet axe, puisque la composante $r\omega$ est très

petite, et, s'ils sont très éloignés de l'axe, une vitesse sensiblement perpendiculaire au plan du point mobile et de l'axe, puisque la composante $r\omega$ croît sans limite.

97. Représentation du mouvement par le roulement et le glissement simultanés de deux surfaces réglées l'une sur l'autre. — La suite des positions dans l'espace de l'axe instantané du mouvement héliçoïdal, ou *axe instantané de rotation et de glissement*, forme une surface réglée S ; la suite des positions de cet axe, supposées marquées à chaque instant dans le corps solide forme une deuxième surface réglée S' liée au corps mobile. A un instant quelconque, ces deux surfaces ont une génératrice commune, qui est l'axe instantané de l'époque considérée. Elles sont de plus tangentes le long de cette génératrice.

Soient, en effet, D, D_1, D_2 (*fig.* 99) des génératrices de S correspondant à des époques successives, D, D'_1, D'_2 les génératrices correspondantes de S'. Après un certain intervalle de temps Δt, D'_1 vient coïncider avec D_1, le corps ayant tourné autour de D et glissé le long de cette droite. Si l'intervalle de temps Δt est infiniment petit, S et S' auront par suite deux génératrices infiniment voisines D, D_1 et D, D'_1 en coïncidence; les points centraux de S et S' sur la génératrice D seront donc confondus ainsi que les plans tangents à S et S' en ces points. De plus, les deux surfaces ayant évidemment le même paramètre de distribution relatif à D, les plans tangents à S et S'

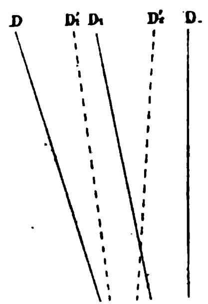


Fig. 99.

seront les mêmes en tous les points de D. Les deux surfaces réglées se raccordent donc suivant la génératrice D.

Le mouvement du mobile pourra par suite s'effectuer par un roulement des deux surfaces l'une sur l'autre, accompagné d'un glissement le long de la génératrice de contact.

98. Définition analytique d'une rotation au moyen de quatre paramètres. — Nous avons déterminé géométriquement la rotation résultante de deux rotations autour d'axes concourants et indiqué un moyen d'en obtenir les éléments par un calcul de trigonométrie sphérique (**93**). Cette détermination s'effectue d'une manière plus symétrique en introduisant des paramètres particuliers pour définir les rotations.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'un axe passant par un point fixe d'un corps solide, 2θ l'angle d'une rotation autour de cet axe. Nous définirons cette rotation par les quatre paramètres ρ, λ, μ, ν ayant pour valeurs :

$$\rho = \cos\theta$$
$$\lambda = \alpha \sin\theta$$
$$\mu = \beta \sin\theta$$
$$\nu = \gamma \sin\theta$$

Ces quatre paramètres sont d'ailleurs liés par la relation identique :

$$\rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

De plus, nous supposerons le sens de la rotation fixé en dirigeant l'axe de cette rotation dans un sens tel qu'un observateur ayant la tête à son extrémité, les pieds à son origine,

voie le mouvement s'effectuer dans le sens des aiguilles d'une montre. Le signe de α, β, γ et, par suite, de λ, μ, ν est ainsi parfaitement fixé pour une rotation déterminée.

Pour une rotation de 180°, les paramètres prennent les valeurs particulières :

$$\rho = 0$$
$$\lambda = \alpha$$
$$\mu = \beta$$
$$\nu = \gamma$$

Pour une rotation de 360°, θ augmente de 180° ; les paramètres ρ, λ, μ, ν changent de signes ; une telle rotation ne change évidemment pas l'état du corps. De même, deux rotations successives de 180° autour d'un même axe se détruisent et donnent, quels que soient leurs sens, un déplacement nul.

99. Composition de deux rotations de 180° autour d'axes concourants. — Deux rotations successives de 180° autour d'axes concourants peuvent être remplacées par une rotation unique dont l'axe est perpendiculaire au plan des deux axes considérés et passe par leur point de concours, et dont l'angle est double de l'angle de ces deux axes.

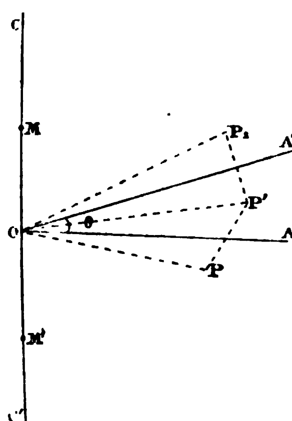


Fig. 100.

Soient OA, OA' (*fig.* 100) deux axes passant par un point fixe O d'un corps solide, θ l'angle de ces deux axes. Si l'on effec-

tue deux rotations de 180° autour de OA, OA′ l'axe de la rotation résultante sera la perpendiculaire OC à OA et OA′. En effet, un point M quelconque de OC est amené par la rotation autour de OA en M′ symétrique par rapport à O, puis ramené en M par la rotation autour de O′. Un point quelconque de OC revient donc à sa position primitive et le mouvement peut être remplacé par une rotation autour de OC.

Pour trouver l'angle de la rotation résultante, considérons un point P quelconque dans le plan AOA′. La rotation autour de OA l'amène en P′ et la rotation autour de OA′ en P_1. L'angle cherché est :

$$POP_1 = 2P'OA + 2P'OA' = 2\theta$$

Il est à remarquer que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'est pas indifférent. Effectuons, en effet, d'abord la rotation autour de OA′ puis celle autour de OA ; le point P_1 du corps vient en P′ puis en P ; la rotation est donc encore de l'angle 2θ mais elle se fait en sens inverse ; la direction de l'axe de la rotation résultante est OC′ et non OC.

Inversement, une rotation quelconque se décompose en deux rotations de 180°. Soit une rotation d'angle 2θ autour de l'axe OC ; prenons un point O sur OC et par ce point élevons deux perpendiculaires OA, OA′ à OC faisant entre elles l'angle θ et telles que le trièdre OAA′C offre la disposition $Oxyz$ (7). Deux rotations successives de 180° autour de OA et de OA′ pourront remplacer la rotation primitive. Cette décomposition est d'ailleurs possible d'une infinité de manières puisque OA est une perpendiculaire quelconque à OC.

100. Détermination analytique de la rotation résul-

tante de deux rotations autour d'axes concourants. — Soient ρ, λ, μ, ν, ρ_1, λ_1, μ_1, ν_1, les paramètres de deux rotations R, R_1 autour d'axes concourants, ρ_2, λ_2, μ_2, ν_2 les paramètres de la rotation R_2 qui peut remplacer R et R_1 (**98**). Décomposons R en deux rotations S, S′ de 180°; soient α, β, γ, α', β', γ', les cosinus directeurs des axes de ces deux rotations. De même, décomposons R_1 en deux rotations S_1, S'_1 de 180° et choisissons pour axe de S_1 celui de la rotation S′, ce qui est possible d'après l'indétermination de la décomposition (**99**). Soient α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de l'axe de S'_1. Les deux rotations S′, S_1 autour de la même droite se détruisent (**98**) et les rotations R, R_1 sont en somme remplacées par S et S'_1.

Or, l'angle des axes de S et S′ est égal au demi-angle θ de la rotation R; de plus ces axes sont perpendiculaires à l'axe de R. On a donc :

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \rho \\ \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0 \\ \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' = 0 \end{cases}$$

On a de même :

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = \rho_1 \\ \lambda_1\alpha' + \mu_1\beta' + \nu_1\gamma' = 0 \\ \lambda_1\alpha'' + \mu_1\beta'' + \nu_1\gamma'' = 0 \end{cases}$$

On a aussi, en appelant a, b, c, les cosinus directeurs de l'axe de R :

$$(3) \qquad \frac{a}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \frac{b}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{c}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Le dernier terme doit avoir le signe + (8) d'après la convention qui fixe le sens des axes S et S′ (**99**).

Les paramètres de la rotation R qui ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} \rho &= \cos\theta \\ \lambda &= a \sin\theta \\ \mu &= b \sin\theta \\ \nu &= c \sin\theta \end{aligned}$$

s'expriment alors en fonction des paramètres de S et S′ à l'aide des équations (1) et (3) de la manière suivante :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \\ \lambda &= \beta\gamma' - \gamma\beta' \\ \mu &= \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \\ \nu &= \alpha\beta' - \beta\alpha' \end{aligned} \right.$$

En exprimant de même que R_1 est la résultante de S_1 et S'_1, on a :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_1 &= \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' \\ \lambda_1 &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' \\ \mu_1 &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' \\ \nu_1 &= \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' \end{aligned} \right.$$

Enfin, puisque R_2 est la résultante de S et S'_1, on a encore :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_2 &= \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' \\ \lambda_2 &= \beta\gamma'' - \gamma\beta'' \\ \mu_2 &= \gamma\alpha'' - \alpha\gamma'' \\ \nu_2 &= \alpha\beta'' - \beta\alpha'' \end{aligned} \right.$$

Des équations (4) on déduit :

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha = \rho\alpha' + \nu\beta' - \mu\gamma' \\ \beta = \rho\beta' + \lambda\gamma' - \nu\alpha' \\ \gamma = \rho\gamma' + \mu\alpha' - \lambda\beta' \end{cases}$$

Les équations (5) donnent de même :

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha'' = \rho_1\alpha' - \nu_1\beta' + \mu_1\gamma' \\ \beta'' = \rho_1\beta' - \lambda_1\gamma' + \nu_1\alpha' \\ \gamma'' = \rho_1\gamma' - \mu_1\alpha' + \lambda_1\beta' \end{cases}$$

En remplaçant alors α, β, γ, par les valeurs (7) dans l'expression de ρ_2 donnée par les équations (6) et en ayant égard aux formules (5), on obtient :

$$\rho_2 = \rho\rho_1 - \lambda\lambda_1 - \mu\mu_1 - \nu\nu_1$$

Pour calculer λ_2, remplaçons dans la deuxième équation (6) β et γ par leurs valeurs tirées de (7) ; nous aurons ainsi :

$$\lambda_2 = \gamma''(\rho\beta' + \lambda\gamma' - \nu\alpha') - \beta''(\rho\gamma' + \mu\alpha' - \lambda\beta')$$

ou :

$$\lambda_2 = \rho(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \lambda(\gamma'\gamma'' + \beta'\beta'' + \alpha'\alpha'') - \lambda\alpha'\alpha'' - \nu\alpha'\gamma'' - \mu\alpha'\beta''$$

ou enfin :

$$\lambda_2 = \rho\lambda_1 + \lambda\rho_1 - \alpha'(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'')$$

Le multiplicateur de α' s'écrit en remplaçant α'', β'', γ'' à l'aide des équations (8) :

$$\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'' = \rho_1(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma') + \alpha'(\mu\nu_1 - \nu\mu_1) \\ + \beta'(\nu\lambda_1 - \lambda\nu_1) + \gamma'(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)$$

ou, d'après (1) :

$$\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'' = \alpha'(\mu\nu_1 - \nu\mu_1) + \beta'(\nu\lambda_1 - \lambda\nu_1) + \gamma'(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)$$

Or, on a, en considérant celles des équations (1) et (2) qui contiennent α' :

$$\frac{\alpha'}{\mu\nu_1 - \nu\mu_1} = \frac{\beta'}{\nu\lambda_1 - \lambda\nu_1} = \frac{\gamma'}{\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1}$$
$$= \frac{1}{\alpha'(\mu\nu_1 - \nu\mu_1) + \beta'(\nu\lambda_1 - \lambda\nu_1) + \gamma'(\lambda\mu_1 - \mu\lambda_1)}$$

le dernier rapport étant obtenu en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des précédents multipliés respectivement par α', β', γ'. En égalant le premier rapport au dernier, on a :

$$\alpha'(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'') = \mu\nu_1 - \nu\mu_1$$

La valeur cherchée de λ_2 est donc :

$$\lambda_2 = \rho\lambda_1 + \lambda\rho_1 + \mu\nu_1 - \nu\mu_1$$

Celles de μ_2 et ν_2 s'obtiennent de la même manière, et les paramètres de la rotation résultante R_2 sont :

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= \rho\rho_1 - \lambda\lambda_1 - \mu\mu_1 - \nu\nu_1 \\
\lambda_2 &= \rho\lambda_1 + \lambda\rho_1 + \mu\nu_1 - \nu\mu_1 \\
\mu_2 &= \rho\mu_1 + \mu\rho_1 + \nu\lambda_1 - \lambda\nu_1 \\
\nu_2 &= \rho\nu_1 + \nu\rho_1 + \lambda\mu_1 - \mu\lambda_1
\end{aligned}$$

Ces formules font bien voir que l'on ne peut pas intervertir l'ordre des rotations composantes : car, en permutant les indices dans les seconds membres, on change les valeurs de λ_2, μ_2, ν_2.

Cette méthode s'applique à la composition d'un nombre quelconque de rotations autour d'axes concourants; les paramètres de la rotation résultante sont toujours des fonctions linéaires et homogènes des paramètres des rotations composantes.

101. Application. — On imprime à un corps solide présentant un point fixe O (*fig.* 101) une rotation autour de la droite OS. Trouver la position OD′ que vient occuper après la rotation une droite OD de ce corps, passant par le point fixe.

Soient ρ, λ, μ, ν les paramètres de la rotation OS, ξ, η, ζ les cosinus directeurs de la droite OD, liée invariablement au corps solide et ξ', η', ζ' les cosinus directeurs inconnus de la direction OD′. Désignons par R′ une rotation inverse de R, par S une rotation de 180° autour de OD et par S′ une rotation de 180° autour de OD′. Les paramètres de ces rotations sont, pour R′, ρ, $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$; pour S, 0, ξ, η, ζ et enfin pour S′, 0, ξ', η', ζ'. Si on effectue les rotations R′, S, R le résultat obtenu équivaut à celui de la rotation S′. Considérons, en effet, un point quelconque M lié à OD′ et son symétrique M_1 par rapport à cette droite. La rotation R′ inverse de R amène OD′ sur OD et par suite la ligne MM_1 en $M'M'_1$. La

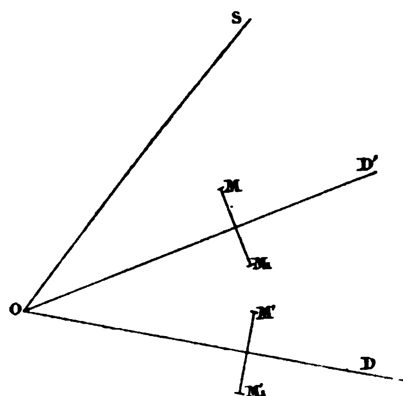


Fig. 101.

rotation S de 180° autour de OD amenant M′ sur M_1', la rotation R qui amène OD sur OD′ amène M_1' en M_1. Le résultat est donc bien le même que si on avait effectué une rotation de 180° autour de OD′. Par suite, pour déterminer ξ', η', ζ', il suffit d'appliquer les formules précédentes.

102. Composition des vitesses. — Les propositions qui suivent résultent des propositions concernant un déplacement fini imprimé à un corps solide (**86** et suivants).

Vitesse de translation. — Si un corps est animé de deux vitesses de translation, on peut le regarder comme animé d'une vitesse unique de translation égale à la somme géométrique des deux vitesses composantes.

Inversement, une vitesse de translation imprimée à un corps solide peut être, d'une infinité de manières, décomposée en plusieurs autres. Toutefois, le problème est déterminé si cette décomposition s'effectue suivant deux ou trois directions.

Vitesses de rotation autour d'axes concourants. — La vitesse d'un point M quelconque, appartenant à un corps solide animé de plusieurs vitesses angulaires autour d'axes concourants, peut être considérée comme la somme géométrique des moments par rapport au point M des vitesses angulaires portées respectivement sur chaque axe dans un sens convenable. On peut encore dire que c'est le moment par rapport au point considéré de la somme géométrique des vitesses angulaires. La droite suivant laquelle est portée cette résultante des vitesses angulaires est l'axe de la rotation unique.

Inversement, un corps animé d'un mouvement de rotation autour d'une droite peut être regardé comme animé de plusieurs mouvements de rotation autour d'axes concourants,

pourvu que la vitesse angulaire qui caractérise le premier mouvement puisse être regardée comme la somme géométrique des vitesses angulaires qui caractérisent les autres mouvements.

Vitesse de rotation autour d'axes parallèles. — Nous traiterons ce cas comme la limite du précédent. L'effet de deux rotations caractérisées par des vitesses angulaires Oω, Oω' (*fig.* 102) autour des droites Od, Od' est le même que celui d'une rotation unique, caractérisée par une vitesse angulaire OR, résultante des deux premières, autour de la droite OD. Si donc le point O s'éloigne à l'infini, les deux droites Od, Od' étant assujetties à passer par deux points fixes A et B, les axes des premières rotations tendent à devenir parallèles. L'axe de la rotation unique, toujours situé dans leur plan, devient parallèle à leur direction commune et la vitesse angulaire de cette rotation tend à devenir égale à la somme algébrique des vitesses angulaires composantes. Quant à la situation de l'axe, elle est donnée à la limite par l'équation

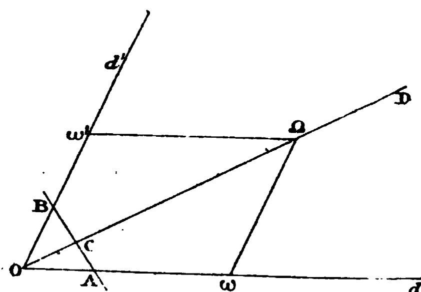


Fig. 102.

$$\omega . \, AC = \omega' . \, BC$$

obtenue en appliquant le théorème des moments par rapport au point C.

On peut traduire ce résultat analytiquement. Soient α, β, γ,

les cosinus directeurs de la direction commune des deux axes, ω, ω' les vitesses angulaires partielles; ξ, η, ζ les coordonnées d'un point du premier axe, ξ', η', ζ' celles d'un point du second axe, x, y, z celles du point dont nous voulons évaluer la vitesse. Nous savons que la vitesse d'un point quelconque d'un corps animé d'un mouvement de rotation est le moment par rapport à ce point de la vitesse angulaire portée sur l'axe dans un sens convenable. Donc (**23**) :

$$v_x = \beta\omega(z - \zeta) + \beta\omega'(z - \zeta') - \gamma\omega(y - \eta) - \gamma\omega'(y - \eta')$$

ou :

$$v_x = \beta(\omega + \omega')\left(z - \frac{\omega\zeta + \omega'\zeta'}{\omega + \omega'}\right) - \gamma(\omega + \omega')\left(y - \frac{\omega\eta + \omega'\eta'}{\omega + \omega'}\right)$$

Par permutation, on déduit :

$$v_y = \gamma(\omega + \omega')\left(x - \frac{\omega\xi + \omega'\xi'}{\omega + \omega'}\right) - \alpha(\omega + \omega')\left(z - \frac{\omega\zeta + \omega'\zeta'}{\omega + \omega'}\right)$$

$$v_z = \alpha(\omega + \omega')\left(y - \frac{\omega\eta + \omega'\eta'}{\omega + \omega'}\right) - \beta(\omega + \omega')\left(x - \frac{\omega\xi + \omega'\xi'}{\omega + \omega'}\right)$$

Ces expressions représentent les projections sur les axes coordonnés du moment par rapport au point considéré du segment $\omega + \omega'$ porté sur une droite parallèle à la direction commune des deux axes et ayant pour origine le point dont les coordonnées sont :

$$\frac{\omega\xi + \omega'\xi'}{\omega + \omega'}, \qquad \frac{\omega\eta + \omega'\eta'}{\omega + \omega'}, \qquad \frac{\omega\zeta + \omega'\zeta'}{\omega + \omega'}.$$

Les conclusions sont donc les mêmes que s'il s'agissait de composer deux forces parallèles.

Un cas d'exception est celui où $\omega = -\omega'$. Deux vitesses

de rotation égales et de sens contraires autour d'axes parallèles donnent lieu à une vitesse de translation unique.

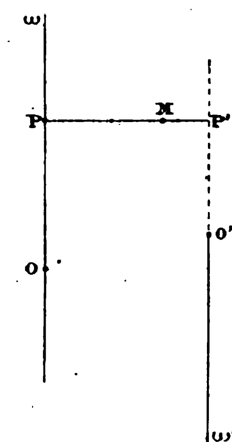


Fig. 103.

L'ensemble des deux rotations $O\omega$ et $O'\omega'$ (*fig.* 103) porte le nom de couple de rotations.

En effet, cherchons la vitesse d'un point quelconque M du corps solide. Nous prendrons ce point dans le plan des deux axes et entre eux. Sous l'action de la première rotation, M vient en avant de la figure et sa vitesse est égale à $MP.\omega$. La vitesse imprimée à M par suite de la seconde rotation est $MP'.\omega$ et, comme ces vitesses sont dirigées dans le même sens, elles s'ajoutent. La vitesse du point M est donc $PP'.\omega$.

Cette expression $PP'.\omega$ est indépendante du point M considéré. Elle est la même pour tous les points du plan des deux axes et, par suite, pour tous les points du corps solide. Tous les points du corps solide ont donc des vitesses égales et de même sens. Le mouvement de ce corps est bien un mouvement de translation.

De cette proposition résulte la suivante : Si un corps solide est animé d'une vitesse de rotation ω autour d'une certaine droite D (*fig.* 104), on peut le considérer comme animé d'une rotation de même vitesse angulaire autour d'une droite D' parallèle à la première, à condition d'introduire un couple de rotations.

En effet, nous ne changerons pas l'état du corps si nous lui attribuons, autour d'une certaine droite D' parallèle à D, deux

vitesses de rotation égales et contraires caractérisées par les vitesses angulaires ω et — ω. Or les rotations Dω et D′(— ω) forment un couple de rotations, ce qui démontre la proposition. Pour définir ce couple de rotations, il suffit de dire que la vitesse de translation qu'il imprime à tous les points du corps est le moment de la vitesse angulaire ω, portée sur l'ancien axe, relativement à un point quelconque de l'autre.

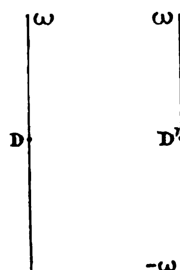


Fig. 104.

Inversement, l'ensemble d'une vitesse de rotation ω autour d'un axe D et d'une translation T perpendiculaire à l'axe peut être remplacé par une rotation unique de même vitesse angulaire autour d'un axe parallèle au premier.

En effet, la translation T peut être remplacée par un couple de rotations dans lequel la valeur commune des deux rotations est ω et la distance des deux axes $\frac{T}{\omega}$. De plus, le plan de ce couple doit être perpendiculaire à la translation T. Le nouvel axe de rotation doit donc être dans un plan passant par le premier, perpendiculaire à la translation T et à une distance déterminée de celui-ci.

103. Expression de la vitesse d'un point quelconque d'un corps solide supposé animé de plusieurs vitesses de rotation et de translation. — On peut, à condition d'introduire des couples de rotations, supposer que tous les axes de rotation passent par un même point A du corps solide pris à volonté. Les rotations se composent alors en une seule R. Les translations peuvent de même être remplacées par une translation unique T.

Imaginons cette translation T décomposée en deux dont l'une T′ soit parallèle à l'axe de la rotation, l'autre T″ lui étant perpendiculaire. L'ensemble de R et T″ équivaut à une rotation unique R′ autour d'un axe parallèle à celui de la rotation R. Le mouvement du corps solide peut donc être remplacé par une rotation unique R′ et par une translation parallèle à l'axe de cette rotation, c'est-à-dire par un mouvement héliçoïdal.

Cette règle pour la composition des vitesses est identique à celle qu'on a obtenue en statique pour la composition des forces et des couples.

104. Théorème. — A un instant quelconque, on peut considérer la vitesse d'un point quelconque du corps solide comme résultant de deux rotations simultanées autour de deux droites D et Δ dont l'une est arbitraire.

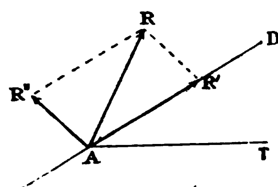


Fig. 103.

En effet, la réduction des vitesses étant effectuée en un certain point A (*fig.* 103) d'une droite quelconque D, on peut, d'après ce qui précède, supposer le corps solide animé d'une seule rotation AR et d'une seule translation AT, cette dernière dépendant du point où on effectue la réduction. La rotation AR peut être décomposée en deux autres situées dans le plan de D et de AR, l'une AR′ dirigée suivant D, l'autre AR″ perpendiculaire à AT. L'ensemble de la translation AT et de la rotation AR″ donne une rotation unique autour d'une droite Δ parallèle à AR″. Donc, tous les points du corps solide peuvent être considérés comme animés de deux vitesses de rotation

autour de deux droites D et Δ dont l'une est choisie arbitrairement.

Ces deux droites D et Δ sont appelées *droites conjuguées.*

Cas d'exception : 1° AT perpendiculaire à AR. — Si AT est perpendiculaire à AR, l'effet de la translation et de la rotation équivaut à une rotation unique autour d'un axe parallèle au premier. Le mouvement du corps solide ne serait donc pas le mouvement le plus général.

2° AR dirigée suivant AD. — Si AR est dirigée suivant AD, on peut dire que AD est parallèle à l'axe instantané du mouvement hélicoïdal et, par suite, n'est pas une droite quelconque.

En effet, décomposons la translation AT en deux autres, l'une T′ dirigée suivant AD, l'autre T″ lui étant perpendiculaire. L'ensemble de la translation T″ et de la rotation AR équivaut à une rotation unique autour d'un axe parallèle au premier. Le mouvement du corps solide se réduirait bien à un mouvement hélicoïdal.

Dans cette hypothèse, la droite Δ doit être considérée comme rejetée à l'infini. En effet, AR se rapprochant de AD, la composante AR″ tendra vers zéro. La distance δ des deux droites AR″ et Δ, donnée par la formule :

$$\delta.\omega'' = AT \qquad (1)$$

montre que δ doit croître indéfiniment. Donc la conjuguée de D est bien rejetée à l'infini.

3° AT perpendiculaire à AD. — Si AT est perpendiculaire à AD, les deux directions AR′ et AR″ se confondent. La décomposition de AR suivant ces deux directions n'est donc plus possible. On doit, dans ce cas, considérer AD comme sa propre

conjuguée. En effet, imaginons que AR′ et AR″ viennent se confondre, la composante ω'' croît indéfiniment. Par suite, d'après l'égalité précédente, δ doit tendre vers zéro, c'est-à-dire que D est à elle-même sa conjuguée.

Les droites d'un corps solide qui sont à elles-mêmes leurs conjuguées appartiennent à un complexe du premier ordre.

105. Théorème. — Toutes les droites d'un corps solide qui sont à elles-mêmes leurs conjuguées sont normales à la vitesse de tous leurs points.

Par hypothèse, la translation AT (*fig.* 106) est perpendiculaire à AD; la droite AD est donc normale à la vitesse de A, vitesse résultant uniquement de la translation AT. Cela a lieu pour un point quelconque de la droite D: en effet, effectuons la réduction en un point quelconque A′ de la droite D. Il suffit pour cela de transporter la translation AT en A′T′ parallèlement à elle-même et la rotation AR en A′R′ parallèle à AR, à condition d'introduire une translation A′T″ perpendiculaire au plan des deux droites AR et A′R′. Ces deux translations A′T′ et A′T″ se composent en une seule, perpendiculaire à AD, et le point A′ se trouve alors dans les mêmes conditions que le point A, ce qui démontre le théorème.

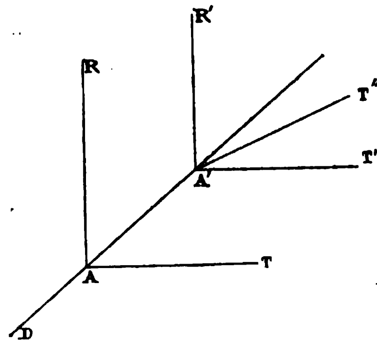


Fig. 106.

106. Théorème. — Toutes les droites d'un corps solide qui

sont à elles-mêmes leurs conjuguées et qui passent par un même point A sont situées dans un même plan.

En effet, d'après ce que nous venons de voir, toutes ces droites sont normales à la vitesse du point A. Elles sont donc situées dans un plan passant par A et perpendiculaire à la vitesse de ce point.

Réciproquement, toutes les droites d'un corps solide qui sont elles-mêmes leurs conjuguées et qui sont dans un même plan sont concourantes.

En effet, soient AB et AC (*fig.* 107) deux droites du corps so-

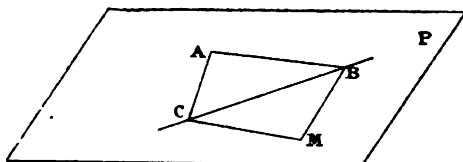


Fig. 107.

lide situées dans un même plan P, concourant en A et jouissant de la propriété énoncée. Toute autre droite de ce plan, normale à la vitesse de tous ses points, passe par A : en effet, si elle n'y passait pas, elle rencontrerait AB et AC en deux points B et C. La vitesse de A normale à AB et AC serait normale à P. Pour la même raison les vitesses de B et C seraient normales à ce plan. Il y aurait donc trois points du plan, non en ligne droite, ayant leurs vitesses normales à P. Il en résulte que tout point M du plan aurait une vitesse qui lui serait normale et, par suite, le mouvement du corps solide serait un mouvement de translation, ce que nous ne supposons pas. Donc la droite BC passe par le point A qui est appelé *foyer du plan.*

107. Théorème. — Le plan normal à la trajectoire d'un point quelconque M d'une droite D passe par sa conjuguée Δ.

En effet, la vitesse de M est la résultante de deux rotations, l'une autour de D, l'autre autour de sa conjuguée Δ. La rotation autour de D donne à M une vitesse nulle. Par suite, la vitesse de M, résultant uniquement de la rotation autour de Δ, est perpendiculaire au plan déterminé par M et Δ. Donc le plan normal à la trajectoire de M passe bien par Δ.

108. Théorème. — Toutes les droites passant par un même point M de l'espace ont leurs conjuguées situées dans un même plan.

En effet, d'après le théorème précédent, elles doivent se trouver dans le plan normal à la vitesse du point M.

109. Théorème. — Toute droite passant par M et rencontrant deux droites conjuguées D et Δ est normale à la vitesse de M.

En effet, cette droite est l'intersection de deux plans P et P′ passant l'un par M et la droite D, l'autre par M et la droite Δ′. D'autre part, la vitesse de M peut être regardée comme la résultante de deux segments V′ et V″ provenant des rotations autour de D et Δ, le segment V′ étant perpendiculaire au plan P, l'autre V″ perpendiculaire au plan P′. Leur résultante Δ est donc perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire à la droite considérée.

De ce théorème il résulte que toute droite normale à la vitesse d'un de ses points et rencontrant une droite D rencontre sa conjuguée Δ.

110. Théorème. — Deux couples quelconques D et Δ, D′ et Δ′ de droites conjuguées appartiennent à un même hyperboloïde.

Considérons une droite T s'appuyant sur D, Δ, D′. Elle rencontre Δ′ : en effet, rencontrant D et Δ, elle est normale à la vitesse d'un de ses points et, comme elle rencontre D′, elle rencontre Δ′. Donc D, Δ, D′, Δ′ sont quatre génératrices d'un même système appartenant à un hyperboloïde.

111. Positions relatives de l'axe instantané de rotation et de glissement et des droites conjuguées. — Soit H (*fig.* 108) l'axe instantané de rotation et de glissement et un point M quelconque sur une droite D du solide. La perpendiculaire MK, abaissée de M sur H, est normale à la trajectoire de M ; la vitesse de M résulte, en effet, d'une translation parallèle à H et d'une rotation perpendiculaire au plan de M et H, qui sont toutes deux perpendiculaires à MK. Cette droite MK doit donc rencontrer la droite Δ conjuguée de D en un certain point M′ (**109**).

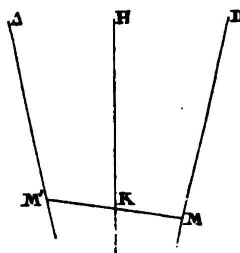


Fig. 108.

Les droites D, H, Δ sont trois génératrices de même système d'un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est perpendiculaire à H. Car la droite MK, qui reste parallèle à un plan perpendiculaire à H et s'appuie sur les droites D, H, Δ, engendre un paraboloïde hyperbolique.

Les droites D, H, Δ sont, par suite, parallèles à un même plan, qui est le second plan directeur du paraboloïde.

La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées D et Δ rencontre normalement l'axe instantané. En effet, si le point M se déplace sur D, la droite MK devient, dans une de ses positions, perpendiculaire à D et Δ ; or elle n'a pas cessé d'être perpendiculaire à H et elle jouit bien de la propriété énoncée.

112. Problème. — Déterminer l'axe instantané de rotation et de glissement connaissant les directions des vitesses de trois points du solide.

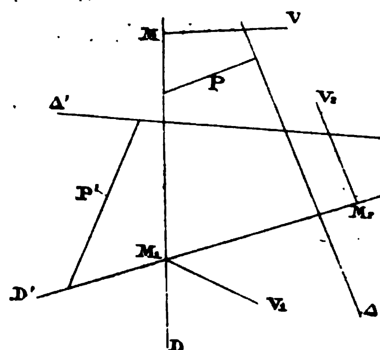


Fig. 109.

Soient M, M_1, M_2 (*fig.* 109) les trois points considérés, MV, M_1V_1, M_2V_2 les directions des vitesses de ces trois points.

La droite D, qui joint les deux points M, M_1, a pour conjuguée une droite Δ, qui est l'intersection des plans normaux en M et M_1 à MV et M_1V_1. De même, la droite D′ qui joint M_1, M_2 a pour conjuguée une certaine droite Δ′, que l'on sait construire. Soient P, P′ les perpendiculaires communes à D et Δ, D′ et Δ′ ; ces droites P et P′ rencontrent normalement l'axe instantané (**111**) qui est, par suite, la perpendiculaire commune à P et P′.

113. Relation entre les distances de deux droites conjuguées à l'axe instantané et les angles de ces droites avec l'axe instantané. — Soient d, d_1 les dis-

tances des droites D et Δ (*fig.* 110) à l'axe instantané H, comptées sur la perpendiculaire commune AIB à ces trois droites. Soient φ et φ_1 les angles de D et Δ avec H ou avec des parallèles AP, BQ à H. Considérons une projection de la figure sur

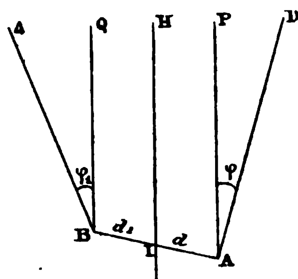


Fig. 110.

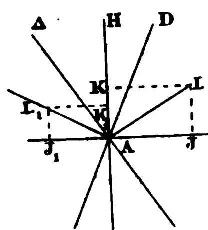


Fig. 111.

un plan parallèle au second plan directeur du paraboloïde hyperbolique dont font partie H, D et Δ (111). Les droites H, D et Δ concourent en un point A (*fig.* 111) qui est la projection de la droite AIB. Les angles DAH, ΔAH sont égaux aux angles considérés φ_1 et φ. La vitesse V_a du point A résulte d'une rotation autour de Δ ; sa projection est donc AL perpendiculaire à AΔ et égale à V_a. D'autre part, en appelant h et ω les vitesses de translation et de rotation à l'époque considérée, V_a résulte aussi d'une translation h parallèle à H, projetée en AK parallèle à AH et égale à h, et d'une rotation ωd autour de H, projetée en AJ $= \omega d$ sur une perpendiculaire à AH. On a alors dans le triangle ALJ, l'angle LAJ étant égal à φ_1 :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{h}{\omega d}$$

De même, en projetant la vitesse V_b de B et ses composantes,

on obtient :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{\omega d_1}$$

On en déduit la relation cherchée :

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{d_1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{d}$$

114. Application. — L'axe instantané étant connu, construire la conjuguée d'une droite donnée.

Soit H (*fig.* **112**) l'axe instantané, D la droite considérée, φ l'angle qu'elle fait avec AP parallèle à H, d sa distance à H. La droite AI, perpendiculaire commune à H et D, rencontre la droite Δ, conjuguée de D, en un point B, dont la distance d_1 au point I est donnée par la relation (**113**) :

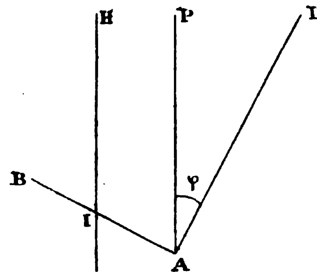


Fig. 112.

$$d_1 = \frac{h}{\omega \operatorname{tg} \varphi}$$

Le point B étant ainsi déterminé, la droite Δ est l'intersection de deux plans menés par B, l'un perpendiculaire à AB, l'autre perpendiculaire à la vitesse du point A. On peut construire ces deux plans et par suite Δ.

115. Caractéristique d'un plan. — Le lieu des points d'un plan quelconque, lié au corps solide, dont la vitesse est contenue dans ce plan, est une droite appelée *caractéristique* du plan.

Considérons, en effet, un plan P (*fig.* **113**); choisissons pour

origine le point où l'axe instantané rencontre ce plan et pour axe des z l'axe instantané. L'équation du plan P est

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \qquad (1)$$

Les composantes suivant les axes de la vitesse d'un point

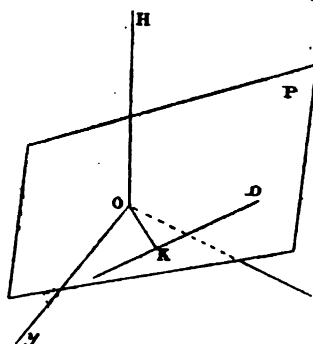


Fig. 113.

quelconque du solide, de coordonnées x, y, z, ont pour expressions :

$$V_x = -\omega y$$
$$V_y = \omega x$$
$$V_z = h$$

en désignant par ω la vitesse de rotation et par h la vitesse de translation. Pour les points du plan qui ont une vitesse comprise dans ce plan, ces valeurs vérifient l'équation (1) et l'on a :

$$\omega (\beta x - \alpha y) + \gamma h = 0 \qquad (2)$$

C'est l'équation d'un plan P' parallèle à l'axe instantané OH et perpendiculaire à P. Les points considérés, dont les coordonnées vérifient (1) et (2) sont donc sur la droite D d'intersection de P et P'.

La perpendiculaire OK, abaissée de O sur la caractéristique D, est la plus courte distance de ΘH et de D. La droite D est tangente à la trajectoire de K; car la vitesse de K se trouve dans P : elle est aussi dans P′ puisqu'elle résulte d'une rotation et d'une translation contenues dans P′; elle est donc à l'intersection de P et P′, c'est-à-dire confondue avec D. Réciproquement, si une droite D est tangente à la trajectoire d'un de ses points, K, elle est la caractéristique d'un certain plan. Abaissons, en effet, la perpendiculaire KO sur l'axe instantané OH. La caractéristique du plan DOK passe par K dont la vitesse est, par hypothèse, dirigée dans DOK suivant OD; de plus, elle est dans un plan P′, passant par K, parallèle à OH et perpendiculaire à DOK; cette caractéristique est donc la droite D.

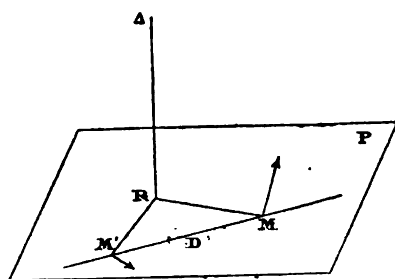


Fig. 114.

La conjuguée Δ de la caractéristique D d'un plan P est aussi la caractéristique d'un certain plan. Soient, en effet, deux points M, M′ de D (*fig.* 114); leurs vitesses sont contenues dans P. La droite Δ, conjuguée de D, est l'intersection de deux plans perpendiculaires en M et M′ aux vitesses de M et M′ (**107**); c'est donc une perpendiculaire à P, menée par le point de rencontre R de deux perpendiculaires aux vitesses de M et M′. Les droites MR, M′R normales aux vitesses de M, M′ sont normales aux vitesses de tous leurs points. Par suite, la vitesse du point R de Δ est normale à MR et M′R, c'est-à-dire à P. La droite Δ est donc tangente à

la trajectoire d'un de ses points, R, et elle est bien la caractéristique d'un plan.

On démontre que la droite D est l'intersection du plan P correspondant à l'époque t avec sa position infiniment voisine correspondant à l'époque $t + \Delta t$, ce qui justifie le nom de caractéristique du plan P donné à la droite D [1].

116. Théorie analytique du mouvement d'un corps entièrement libre. — Soient ox, oy, oz un système d'axes fixes, OX, OY, OZ un système d'axes mobiles dont l'origine a pour coordonnées par rapport aux axes fixes a, b, c, et faisant avec les premiers des angles dont les cosinus sont α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''. Nous supposerons les axes mobiles liés au corps solide, les quantités a, b, c, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'', étant des fonctions connues du temps qui définissent le mouvement. Les formules de transformation sont :

$$x = a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z$$
$$y = b + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z$$
$$z = c + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z$$

Les composantes suivant les axes fixes de la vitesse d'un point quelconque du solide, de coordonnées X, Y, Z, ont pour expressions :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{db}{dt} + X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dc}{dt} + X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt} \end{aligned} \right.$$

(1) Consulter le mémoire de M. Brisse dans le *Journal de Liouville* (tome XV, 2e série).

Nous poserons, comme nous l'avons déjà fait (83) :

$$\alpha''\frac{d\alpha'}{dt}+\beta''\frac{d\beta'}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma'}{dt}=p$$

$$\alpha\frac{d\alpha''}{dt}+\beta\frac{d\beta''}{dt}+\gamma\frac{d\gamma''}{dt}=q$$

$$\alpha'\frac{d\alpha}{dt}+\beta'\frac{d\beta}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma}{dt}=r$$

La pérmutation des accents dans les premiers membres de ces formules change le signe des seconds membres.

Considérons les trois équations suivantes en $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$:

$$\alpha\frac{d\alpha}{dt}+\beta\frac{d\beta}{dt}+\gamma\frac{d\gamma}{dt}=0$$

$$\alpha'\frac{d\alpha}{dt}+\beta'\frac{d\beta}{dt}+\gamma'\frac{d\gamma}{dt}=r$$

$$\alpha''\frac{d\alpha}{dt}+\beta''\frac{d\beta}{dt}+\gamma''\frac{d\gamma}{dt}=-q$$

Nous en déduisons :

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt}&=r\alpha'-q\alpha''\\ \frac{d\beta}{dt}&=r\beta'-q\beta''\\ \frac{d\gamma}{dt}&=r\gamma'-q\gamma''\end{aligned}\right.$$

Les groupes d'équations analogues en $\frac{d\alpha'}{dt}, \frac{d\beta'}{dt}, \frac{d\gamma'}{dt}$ et $\frac{d\alpha''}{dt}$,

$\frac{d\beta''}{dt}, \frac{d\gamma''}{dt}$ donnent de même :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha'}{dt} = p\alpha'' - r\alpha \\ \frac{d\beta'}{dt} = p\beta'' - r\beta \\ \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha''}{dt} = q\alpha - p\alpha \\ \frac{d\beta''}{dt} = q\beta - p\beta' \\ \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma' \end{cases}$$

Les formules (1) deviennent alors, en remplaçant :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + \alpha(qZ - rY) + \alpha'(rX - pZ) + \alpha''(pY - qX) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{db}{dt} + \beta(qZ - rY) + \beta'(rX - pZ) + \beta''(pY - qX) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dc}{dt} + \gamma(qZ - rY) + \gamma'(rX - pZ) + \gamma''(pY - qX) \end{cases}$$

Les composantes V_X, V_Y, V_Z de la vitesse suivant les axes mobiles ont pour expressions :

$$V_X = \alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma \frac{dz}{dt}$$

$$V_Y = \alpha' \frac{dx}{dt} + \beta' \frac{dy}{dt} + \gamma' \frac{dz}{dt}$$

$$V_Z = \alpha'' \frac{dx}{dt} + \beta'' \frac{dy}{dt} + \gamma'' \frac{dz}{dt}$$

Posons. pour abréger :

$$\alpha \frac{da}{dt} + \beta \frac{db}{dt} + \gamma \frac{dc}{dt} = A$$

$$\alpha' \frac{da}{dt} + \beta' \frac{db}{dt} + \gamma' \frac{dc}{dt} = B$$

$$\alpha'' \frac{da}{dt} + \beta'' \frac{db}{dt} + \gamma'' \frac{dc}{dt} = C$$

Les expressions de V_X, V_Y, V_Z deviennent, d'après (5) :

$$(6) \qquad \begin{cases} V_X = A + qZ - rY \\ V_Y = B + rX - pZ \\ V_Z = C + pY - qX \end{cases}$$

Ces formules ne diffèrent de celles trouvées dans l'étude du mouvement d'un corps qui a un point fixe (83) que par l'introduction des quantités A, B, C.

Ces quantités, indépendantes de X, Y, Z, sont les mêmes pour tous les points du corps ; elles sont les composantes d'une vitesse de translation commune à tous ces points. Les deuxièmes parties des seconds membres sont les composantes d'une rotation autour d'un axe passant par l'origine dont l'équation est :

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r}$$

La vitesse angulaire de cette rotation a pour valeur :

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

Le mouvement le plus général d'un corps peut donc être ramené à une translation et une rotation ; il se réduira à un mouvement hélicoïdal si cette translation devient parallèle à

l'axe de la rotation. Pour arriver à ce résultat, cherchons les points du corps dont la vitesse est parallèle à l'axe de la rotation considérée. Leurs coordonnées satisfont aux équations :

$$\frac{V_X}{p} = \frac{V_Y}{q} = \frac{V_Z}{r}$$

ou :

$$\frac{A + qZ - rY}{p} = \frac{B + rX - pZ}{q} = \frac{C + pY - qX}{r}$$

Chacun de ces trois rapports est égal à celui qu'on obtient en multipliant et divisant chacun d'eux par p, q, r et ajoutant terme à terme. On a donc :

$$(7)\ \frac{A+qZ-rY}{p} = \frac{B+rX-pZ}{q} = \frac{C+pY-qX}{r} = \frac{Ap+Bq+Cr}{\omega^2}$$

Le lieu des points cherchés est donc une droite : cette droite, parallèle à l'axe de la rotation ω, ne fait que glisser sur elle-même dans le mouvement du corps. C'est l'axe instantané de rotation et de glissement. Dans les équations de cet axe, mettons en évidence les coordonnées d'un de ses points. On déduit de (7) :

$$qZ - rY = \frac{p\,(Ap + Bq + Cr) - A\,(p^2 + q^2 + r^2)}{\omega^2}$$

ou :

$$qZ - rY = \frac{q\,(Bp - Aq) - r\,(Ar - Cp)}{\omega^2}$$

Posons :

$$Cq - Br = A_1$$
$$Ar - Cp = B_1$$
$$Bp - Aq = C_1$$

Nous aurons alors :

$$qZ - rY = \frac{qC_1 - rB_1}{\omega^2}$$

et, par analogie :

$$rX - pZ = \frac{rA_1 - pC_1}{\omega^2}$$

$$pY - qX = \frac{pB_1 - qA_1}{\omega^2}$$

Les équations de l'axe instantané deviennent :

$$(8) \qquad \frac{X - \frac{A_1}{\omega^2}}{p} = \frac{Y - \frac{B_1}{\omega^2}}{q} = \frac{Z - \frac{C_1}{\omega^2}}{r}$$

Cette nouvelle forme montre que l'axe instantané est parallèle à l'axe de la rotation trouvée primitivement et passe par le point de coordonnées $\frac{A_1}{\omega^2}, \frac{B_1}{\omega^2}, \frac{C_1}{\omega^2}$. En introduisant ces coordonnées les formules (6) deviennent :

$$(9) \left\{ \begin{aligned} V_X &= A + \frac{qC_1 - rB_1}{\omega^2} + q\left(Z - \frac{C_1}{\omega^2}\right) - r\left(Y - \frac{B_1}{\omega^2}\right) \\ V_Y &= B + \frac{rA_1 - pC_1}{\omega^2} + r\left(X - \frac{A_1}{\omega^2}\right) - p\left(Z - \frac{C_1}{\omega^2}\right) \\ V_Z &= C + \frac{pB_1 - qA_1}{\omega^2} + p\left(Y - \frac{B_1}{\omega^2}\right) - q\left(X - \frac{A_1}{\omega^2}\right) \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs :

$$A + \frac{qC_1 - rB_1}{\omega^2} = \frac{A(p^2 + q^2 + r^2) + q(Bp - Aq) - r(Ar - Cp)}{\omega^2}$$

ou :

$$A + \frac{qC_1 - rB_1}{\omega^2} = p\,\frac{Ap + Bq + Cr}{\omega^2}$$

Posons :

$$Ap + Bq + Cr = h\omega$$

La quantité h, indépendante de X, Y, Z, est la même pour tous les points du corps. Nous aurons alors :

$$A + \frac{qC_1 - rB_1}{\omega^2} = p\frac{h}{\omega}$$

et, par analogie :

$$B + \frac{rA_1 - pC_1}{\omega^2} = q\frac{h}{\omega}$$

$$C + \frac{pB_1 - qA_1}{\omega^2} = r\frac{h}{\omega}$$

En portant ces valeurs dans les équations (9), nous obtenons enfin pour expressions des composantes de la vitesse :

$$V_X = h\frac{p}{\omega} + q\left(Z - \frac{C_1}{\omega^2}\right) - r\left(Y - \frac{B_1}{\omega^2}\right)$$

$$V_Y = h\frac{q}{\omega} + r\left(X - \frac{A_1}{\omega^2}\right) - p\left(Z - \frac{C_1}{\omega^2}\right)$$

$$V_Z = h\frac{r}{\omega} + p\left(Y - \frac{B_1}{\omega^2}\right) - q\left(X - \frac{A_1}{\omega^2}\right)$$

La vitesse d'un point quelconque du corps solide se compose donc :

1° D'une vitesse de translation, parallèle à l'axe instantané, dont les composantes suivant les axes mobiles sont :

$$h\frac{p}{\omega} \qquad h\frac{q}{\omega} \qquad h\frac{r}{\omega}$$

et dont la grandeur est :

$$h = \frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

2° D'une vitesse de rotation autour de l'axe instantané, qui est parallèle à la droite d'équation :

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r}$$

et passe par le point de coordonnées :

$$\frac{A_1}{\omega^2} \qquad \frac{B_1}{\omega^2} \qquad \frac{C_1}{\omega^2}$$

La grandeur de cette vitesse de rotation est :

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

117. Équation de la droite conjuguée d'une droite donnée D. — Prenons pour axe des z l'axe instantané du mouvement héliçoïdal et soient

$$x = az + p$$
$$y = bz + q$$

les équations de la droite D dans ce système de coordonnées.

Si α, β, γ désignent les coordonnées d'un point M quelconque de la droite cherchée, pour trouver ses équations nous écrirons, d'après ce que nous avons vu (**107**), que le plan normal à la vitesse de ce point M contient la droite D ou bien encore que la vitesse du point M est normale à la droite D et à une droite quelconque du plan déterminé par le point M et cette droite D. Nous choisirons pour cette droite quelconque la droite qui va du point M à la trace de la droite D sur le plan des xy. Nous aurons alors en remarquant que les com-

posantes de la vitesse du point M sont :

$$v_x = -\omega\beta \qquad v_y = \omega\alpha \qquad v_z = h$$
$$\omega(b\alpha - a\beta) + h = 0$$
$$\omega(\beta p - \alpha q) + h\gamma = 0$$

Si dans ces deux dernières équations nous regardons α, β, γ comme des coordonnées courantes, elles représentent les équations de la droite cherchée. Résolues par rapport à x et y, elles peuvent s'écrire :

$$x = \frac{h}{\omega} \cdot \frac{az + p}{aq - bp} \qquad y = \frac{h}{\omega} \cdot \frac{bz + q}{aq - bp}$$

En comparant ces équations aux équations de la droite D, on démontrerait par le calcul les propriétés de ces droites établies précédemment par la géométrie. Nous examinerons un seul cas, celui où :

$$aq - bp = \frac{h}{\omega}.$$

Les équations de la droite Δ sont alors identiques à celles de la droite D et l'on doit par suite considérer la droite D comme étant à elle-même sa conjuguée. Elle jouit alors de la propriété d'être normale à la vitesse de tous ses points. Il suffit pour le vérifier de montrer qu'elle est normale à la vitesse du point trace de cette droite sur le plan des xy, c'est-à-dire à la vitesse du point dont les coordonnées sont p, q, 0. Or les composantes de la vitesse de ce point sont :

$$v_x = -\omega q \qquad v_y = \omega p \qquad v_z = h$$

et l'on a bien identiquement

$$av_x + bv_y + v_z = 0$$

ce qui démontre la propriété.

CHAPITRE VII

MOUVEMENT RELATIF. — COMPOSITION DES ACCÉLÉRATIONS

118. Théorème de Coriolis. — On considère un point M entraîné avec un système mobile Σ mais ayant un mouvement indépendant de ce système. Trouver, connaissant le mouvement du système Σ et le mouvement de M relatif à ce système, le mouvement absolu du point M.

Ce problème a déjà été résolu pour les vitesses (**39**). Nous allons le traiter maintenant au point de vue des accélérations. Mais auparavant nous établirons deux lemmes préliminaires.

Lemme I. — Connaissant les vitesses de deux points M et M′ du corps solide à une époque quelconque, trouver la différence géométrique de ces vitesses.

Soit H l'axe instantané du mouvement héliçoïdal (*fig.* 115). Les deux points M et M′ peuvent être regardés comme animés d'une vitesse de rotation autour de H et d'une vitesse de translation parallèle à H et commune à tous les points du corps solide. Donc la différence géométrique des vitesses de M et M′ est, en désignant par ω la vitesse angulaire de rotation relative à

l'époque considérée et en projetant M' en m' sur le plan mené par M perpendiculairement à l'axe instantané :

$$\omega\,[(Pm') - (PM)] = \omega\,(Mm')$$

En désignant par φ l'angle de la direction MM' avec l'axe instantané cette différence géométrique devient :

$$\omega MM' \sin\varphi$$

Donc la différence géométrique des vitesses de M et M' est un segment égal à $\omega MM' \sin\varphi$ porté à partir de M sur une direction perpendiculaire à la fois à MM' et à l'axe instantané, dans le sens où la rotation autour de l'axe instantané entraîne le segment MM'.

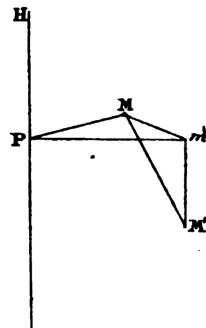


Fig. 115.

Lemme II. — Connaissant les positions AB, A'B' (*fig.* 116) d'un même segment du corps solide aux époques t et $t + \Delta t$, trouver leur différence géométrique ou bien encore la limite du quotient de cette différence par Δt.

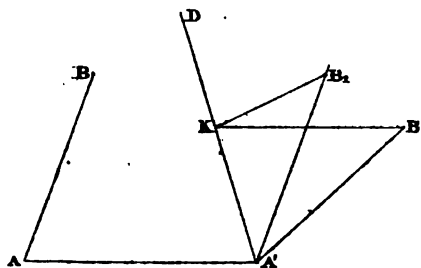


Fig. 116.

Pour effectuer le déplacement qui amène AB sur A'B' on peut faire subir au corps solide une translation représentée en grandeur et direction par AA' de manière à amener AB en $A'B_1$, et ensuite une rotation autour d'un axe A'D passant

par A'. Si on voulait obtenir le mouvement héliçoïdal il faudrait décomposer la translation AA' en deux autres, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à l'axe. Cette deuxième composante aurait pour effet de transporter l'axe parallèlement à lui-même et la nouvelle rotation d'après ce qui précède (**87**) serait de même angle que la première. Donc si Δt tend vers 0, A'D devient parallèle à l'axe instantané du mouvement héliçoïdal et la limite du rapport de l'angle $\Delta\alpha$ dont on doit tourner pour amener $A'B_1$ sur A'B' à Δt est la vitesse angulaire ω à l'instant considéré du mouvement héliçoïdal. Donc :

$$\text{limite}\,\frac{(A'B') - (AB)}{\Delta t} = \lim.\frac{(A'B') - (A'B_1)}{\Delta t} = \lim.\frac{(B_1B')}{\Delta t}$$
$$= \text{limite}\ B_1K\,\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = AB\sin\varphi.\omega$$

φ désignant l'angle de AB avec l'axe du mouvement héliçoïdal.

Le quotient par Δt de la différence géométrique de deux segments AB et A'B' a donc pour limite un nouveau segment égal à AB. sin $\varphi.\omega$ et qui a pour direction celle d'une droite perpendiculaire à la fois au segment AB et à l'axe instantané, menée du côté où la rotation autour d'une parallèle à l'axe instantané, menée par l'origine A, entraîne le segment AB.

Ces lemmes préliminaires établis, considérons à l'époque t un point M entraîné avec le système Σ. A l'époque $t + \Delta t$, il occupe une position M' et, d'après ce qui précède (**39**), nous savons qu'aux époques t et $t + \Delta t$ on a entre la vitesse absolue, la vitesse d'entraînement et la vitesse relative, les relations :

$$(v_a) = (v_e) + (v_r)$$
$$(v'_a) = (v'_e) + (v'_r)$$

L'accélération absolue γ_a du mobile est, par définition :

$$\gamma_a = \text{limite} \frac{(v'_a) - (v_a)}{\Delta t}$$

ce qu'on peut écrire, d'après les égalités précédentes :

$$\gamma_a = \text{limite} \frac{(v'_r) - (v_r)}{\Delta t} + \text{limite} \frac{(v'_e) - (v_e)}{\Delta t}$$

Pour évaluer la limite du dernier rapport, considérons le point μ du système qui, à l'époque $t + \Delta t$, vient coïncider avec le mobile et désignons par v''_e sa vitesse à l'époque t. On peut alors écrire :

$$\text{limite} \frac{(v'_e) - (v_e)}{\Delta t} = \text{limite} \frac{(v'_e) - (v''_e)}{\Delta t} + \text{limite} \frac{(v''_e) - (v_e)}{\Delta t}$$

Or $(v'_e) - (v''_e)$ représente la différence géométrique des vitesses d'un même point du système aux époques t et $t + \Delta t$. Donc :

$$\text{limite} \frac{(v'_e) - (v''_e)}{\Delta t} = \gamma_e$$

Quant au second rapport, pour avoir sa limite il suffit d'appliquer le lemme 1 et on a, en remarquant que

$$\text{limite} \frac{M\mu}{\Delta t} = v_r$$

$$\text{limite} \frac{(v''_e) - (v_e)}{\Delta t} = \text{limite} \frac{M\mu . \omega \sin \varphi}{\Delta t} = v_r \, \omega \sin \varphi$$

φ désignant, à la limite, l'angle de la vitesse relative avec l'axe instantané. La direction de cette composante est celle d'une droite perpendiculaire à la vitesse relative et à l'axe

instantané du côté où la rotation autour de cet axe entraînerait cette vitesse relative.

Il reste maintenant à évaluer la limite du premier rapport. A cet effet, considérons une quantité intermédiaire v''_r, segment défini dans le corps solide à l'époque t et venant à l'époque $t + \Delta t$ coïncider avec la vitesse relative du mobile. On a alors :

$$\text{limite} \frac{(v'_r) - (v_r)}{\Delta t} = \text{limite} \frac{(v'_r) - (v''_r)}{\Delta t} + \text{limite} \frac{(v''_r) - (v_r)}{\Delta t}$$

Or :

$$\text{limite} \frac{(v''_r) - (v_r)}{\Delta t} = \gamma_r$$

Pour avoir la limite du premier rapport, il suffit d'appliquer le second lemme et il vient :

$$\text{limite} \frac{(v'_r) - (v''_r)}{\Delta t} = v_r \omega \sin \varphi$$

φ désignant le même angle que précédemment. La direction de cette dernière composante est celle d'une perpendiculaire au plan de la vitesse relative et de l'axe instantané du côté où la rotation autour de cet axe entraînerait la vitesse relative. On a donc :

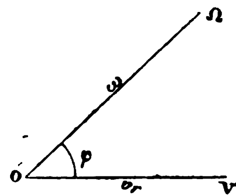


Fig. 117.

$$(\gamma_a) = (\gamma_r) + (\gamma_e) + (2\omega v_r \sin \varphi)$$

La composante $2\omega v_r \sin \varphi$ s'appelle accélération centrifuge composée ou accélération de Coriolis. On peut la regarder comme le moment du segment $O\Omega = \omega$ par rapport à un point V extrémité d'un segment égal et parallèle à la vitesse relative, mené par un point O de l'axe instantané (*fig.* 117).

119. Démonstration analytique du théorème de Coriolis — Considérons un système d'axes fixes $oxyz$ et un système d'axes mobiles OXYZ. Si nous indiquons par le tableau suivant les cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes

	OX	OY	OZ
ox	α	α'	α''
oy	β	β'	β''
oz	γ	γ'	γ''

les formules de transformation sont :

$$x = a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z$$
$$y = b + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z$$
$$z = c + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z$$

En les différentiant deux fois par rapport au temps, il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + X\frac{d^2\alpha}{dt^2} + Y\frac{d^2\alpha'}{dt^2} + Z\frac{d^2\alpha''}{dt^2} +$$
$$\alpha\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha'\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha''\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{d\alpha''}{dt}\frac{dZ}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + X\frac{d^2\beta}{dt^2} + Y\frac{d^2\beta'}{dt^2} + Z\frac{d^2\beta''}{dt^2} +$$
$$\beta\frac{d^2X}{dt^2} + \beta'\frac{d^2Y}{dt^2} + \beta''\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\left(\frac{d\beta}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta'}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{d\beta''}{dt}\frac{dZ}{dt}\right)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2} + X\frac{d^2\gamma}{dt^2} + Y\frac{d^2\gamma'}{dt^2} + Z\frac{d^2\gamma''}{dt^2} +$$
$$\gamma\frac{d^2X}{dt^2} + \gamma'\frac{d^2Y}{dt^2} + \gamma''\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\gamma'}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{d\gamma''}{dt}\frac{dZ}{dt}\right)$$

Ces formules conduisent à regarder l'accélération absolue du mobile comme la résultante de trois segments.

Le premier, dont les projections s'obtiennent en traitant X, Y, Z, comme des constantes, n'est autre que l'accélération d'entraînement.

Le second, dont les composantes

$$\alpha \frac{d^2X}{dt^2} + \alpha' \frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha'' \frac{d^2Z}{dt^2},$$

$$\beta \frac{d^2X}{dt^2} + \beta' \frac{d^2Y}{dt^2} + \beta'' \frac{d^2Z}{dt^2},$$

$$\gamma \frac{d^2X}{dt^2} + \gamma' \frac{d^2Y}{dt^2} + \gamma'' \frac{d^2Z}{dt^2}$$

représentent les projections sur les axes fixes d'une grandeur géométrique ayant pour composantes suivant les axes mobiles $\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2Y}{dt^2}, \frac{d^2Z}{dt^2}$ est par définition l'accélération relative γ_r.

Enfin, pour interpréter le troisième segment, revenons aux équations qui, dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe (**83**), définissent les quantités p, q, r. Ces équations sont

$$p = \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt}$$

$$q = \alpha \frac{d\alpha''}{dt} + \beta \frac{d\beta''}{dt} + \gamma \frac{d\gamma''}{dt}$$

$$r = \alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt}$$

et nous savons que

$$\frac{d\alpha}{dt} = r\alpha - q\alpha''$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = p\alpha'' - r\alpha$$

$$\frac{d\alpha''}{dt} = q\alpha - p\alpha'$$

Nous aurions pour $\frac{d\beta}{dt}, \frac{d\beta'}{dt}, \frac{d\beta''}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma'}{dt}, \frac{d\gamma''}{dt}$ des expressions analogues. Substituons ces valeurs dans les expressions des composantes du troisième segment; elles pourront alors s'écrire :

$$2\left[\alpha\left(q\frac{dZ}{dt} - r\frac{dY}{dt}\right) + \alpha'\left(r\frac{dX}{dt} - p\frac{dZ}{dt}\right) + \alpha''\left(p\frac{dY}{dt} - q\frac{dX}{dt}\right)\right]$$

$$2\left[\beta\left(q\frac{dZ}{dt} - r\frac{dY}{dt}\right) + \beta'\left(r\frac{dX}{dt} - p\frac{dZ}{dt}\right) + \beta''\left(p\frac{dY}{dt} - q\frac{dX}{dt}\right)\right]$$

$$2\left[\gamma\left(q\frac{dZ}{dt} - r\frac{dY}{dt}\right) + \gamma'\left(r\frac{dX}{dt} - p\frac{dZ}{dt}\right) + \gamma''\left(p\frac{dY}{dt} - q\frac{dX}{dt}\right)\right]$$

Elles représentent donc les projections sur les axes fixes d'un segment dont les composantes suivant les axes mobiles sont :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2\left(q\frac{dZ}{dt} - r\frac{dY}{dt}\right) \\ 2\left(r\frac{dX}{dt} - p\frac{dZ}{dt}\right) \\ 2\left(p\frac{dY}{dt} - q\frac{dX}{dt}\right) \end{array} \right.$$

Si l'on désigne par γ_c le segment ainsi défini, on a :

$$(\gamma_a) = (\gamma_r) + (\gamma_e) + (\gamma_c)$$

Imaginons par l'origine O des coordonnées mobiles (*fig.* **118**) un segment OΩ tel que les coordonnées de son extrémité Ω soient, par rapport aux axes mobiles, p, q, r et un point V ayant pour coordonnées par rapport à ces mêmes axes $\frac{dX}{dt}$,

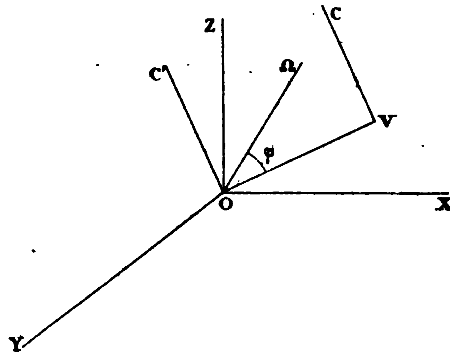


Fig. 118.

$\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$. Ce point V ainsi défini est l'extrémité d'un segment OV égal et parallèle à la vitesse relative.

Les composantes (1) représentent alors les projections sur les axes mobiles du double du moment du segment OΩ par rapport au point V. Par suite

$$\gamma_c = 2\omega v_r \sin\varphi$$

La direction de ce segment est celle d'une perpendiculaire VC au plan de la vitesse angulaire et de la vitesse relative et dans un sens tel que si on regarde VO comme analogue de OX, VΩ comme analogue de OY, le segment VC comme analogue de OZ, le trièdre VOΩC et le trièdre OXYZ aient même disposition. Il en sera de même du trièdre OΩ, OV, OC' formé

par trois droites respectivement parallèles à l'axe instantané, à la vitesse relative et à l'accélération de Coriolis.

Si on se donne les cosinus directeurs a, b, c de l'axe instantané et ceux a', b', c' de la vitesse angulaire, on peut déterminer les cosinus directeurs de l'accélération de Coriolis. Un problème analogue a été traité (8). On a alors :

$$\frac{a''}{bc'-cb'}=\frac{b''}{ca'-ac'}=\frac{c''}{ab'-ba'}=\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{1}{\Delta}$$

la valeur de Δ étant :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

On en déduit :

$$a''=\frac{bc'-cb'}{\sin\varphi} \qquad b''=\frac{ca'-ac'}{\sin\varphi} \qquad c''=\frac{ab'-ba'}{\sin\varphi}$$

120. Première application. — Composantes de l'accélération d'un point mobile dans un plan suivant le rayon vecteur et la perpendiculaire au rayon vecteur. — Soient M (*fig.* 119) un point animé d'un mouvement quelconque dans le plan xOy, O le pôle, Ox l'axe polaire, θ l'angle xOM, r la longueur OM. Considérons le mouvement de M comme résultant d'un mouvement relatif sur la droite OM animée elle-même d'un mouvement d'entraînement autour du point O. L'accélération γ_a du mobile sera l'accélération résultant de ces deux mouvements.

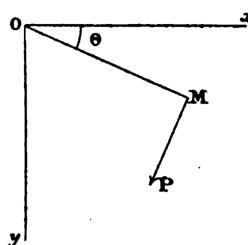


Fig. 119.

Le point de la droite coïncidant avec M est animé d'un mouvement circulaire; l'accélération d'entraînement γ_e est due à ce mouvement. Sa composante suivant MO, dont nous indiquons entre parenthèses la direction, a pour valeur (**80**):

$$r\frac{d\theta^2}{dt^2} \qquad \text{(MO)}$$

et celle suivant une perpendiculaire MP à MO, élevée dans le sens où θ croît, est :

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \text{(MP)}$$

L'accélération relative γ_r due à un mouvement rectiligne sur OM a pour valeur :

$$\frac{d^2r}{dt^2} \qquad \text{(OM)}$$

L'axe instantané du mouvement d'entraînement est une perpendiculaire en O au plan xOy; la vitesse angulaire de ce mouvement est $\frac{d\theta}{dt}$; la vitesse relative de M est $\frac{dr}{dt}$ et l'angle de l'axe instantané avec la vitesse relative est droit. L'accélération de Coriolis γ_c a donc pour expression :

$$2\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} \qquad \text{(MP)}$$

La direction perpendiculaire à l'axe instantané et à la ligne d'action OM de la vitesse relative est MP.

L'accélération γ_a, résultante de γ_e, γ_r et γ_c a donc pour valeur:

$$\gamma_a = \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}\right) && \text{(OM)} \\ &+\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}\right) && \text{(MP)} \end{aligned} \right.$$

Ce sont les valeurs déjà trouvées (30) pour les composantes suivant OM et MP.

121. Deuxième application: — Décomposition de l'accélération d'un point mobile dans l'espace, en faisant usage de coordonnées polaires. — Soient M (*fig.* 120) un point mobile défini par ses coordonnées polaires ρ, θ et ψ relatives au pôle O et aux axes Ox, Oy, Oz. Comme nous l'avons fait pour la vitesse, nous choisirons pour directions des composantes de l'accélération les trois directions MP, MQ, MR, déjà définies (25). Considérons le mouvement de M comme résultant d'un mouvement relatif dans le plan MOz, animé lui-même d'un mouvement d'entraînement autour de l'axe Oz. L'accélération γ_a du mobile sera l'accélération résultant de ces deux mouvements.

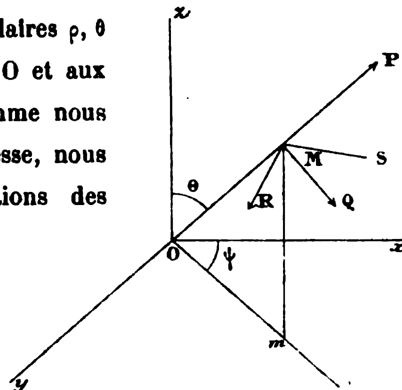


Fig. 120.

Le point du plan MOz coïncidant avec M est animé d'un mouvement circulaire, qui est le même que celui de sa projection m sur xOy dont les coordonnées polaires sont $\rho \sin \theta$ et ψ. L'accélération d'entraînement γ_e est due à ce mouvement. Sa composante suivant MR perpendiculaire à mO a pour valeur (30) :

$$\rho \sin \theta \frac{d^2\psi}{dt^2} \qquad \text{(MR)}$$

et celle suivant MS, parallèle à mO et dirigée en sens contraire, est :

$$-\rho \sin\theta \frac{d\psi^2}{dt^2}$$

Les droites MP, MQ, MS sont dans un même plan et l'angle de MS avec MQ est θ ; cette dernière composante se réduit donc en deux autres dirigées suivant MP, MQ qui sont :

$$-\rho \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \qquad \text{(MP)}$$

$$-\rho \sin\theta \cos\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \qquad \text{(MQ)}$$

L'accélération relative γ_r est due au mouvement dans le plan MOz du point M dont les coordonnées polaires dans ce plan sont ρ et θ. Ses composantes suivant MP, MQ sont donc (**120**) :

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \frac{d\theta^2}{dt^2} \qquad \text{(MP)}$$

$$\rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d\rho}{dt} \qquad \text{(MQ)}$$

L'axe instantané du mouvement d'entraînement est Oz ; la vitesse relative est contenue dans le plan MOz ; l'accélération de Coriolis γ_c est donc dirigée suivant MR. D'ailleurs, la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement est $\frac{d\psi}{dt}$ et γ_c est égal au produit de $2\frac{d\psi}{dt}$ par la projection de la vitesse relative sur une perpendiculaire MS à l'axe instantané. Or, les composantes de la vitesse relative suivant MP et MQ sont $\frac{d\rho}{dt}$ et $\rho \frac{d\theta}{dt}$ (**24**).

Sa projection sur MS est donc :

$$\frac{d\rho}{dt}\sin\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\cos\theta$$

et l'accélération γ_c a pour valeur :

$$2\sin\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\psi}{dt} + 2\rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} \qquad \text{(MR)}$$

L'accélération γ_a, résultante de γ_e, γ_r, γ_c a donc pour expression :

$$\gamma_a = \begin{cases} \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{d\theta^2}{dt^2} - \rho\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) & \text{(MP)} \\ + \left(\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \rho\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) & \text{(MQ)} \\ + \left(\rho\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\sin\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\psi}{dt} + 2\rho\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}\right) & \text{(MR)} \end{cases}$$

La composante suivant MR peut s'écrire encore :

$$\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right)$$

On voit alors qu'elle s'annule si le principe des aires s'applique relativement au plan xOy. Dans ce cas, les forces auxquelles est soumis le point M rencontrent donc Oz ou lui sont parallèles, théorème que l'on démontre en dynamique.

122. Troisième application. — Mouvement d'un point à la surface de la terre. — Soient M (*fig.* 121) un point sur l'hémisphère nord de la terre, $Mxyz$ un système d'axes entraîné dans son mouvement, Mx étant une tangente au parallèle de M menée du côté de l'est, My une tangente au méridien de M menée du côté du sud, Mz la verticale du

point M menée dans un sens opposé à celui de la pesanteur. Le mouvement réel de la terre s'effectuant en sens inverse de celui des aiguilles d'une montre, la direction positive de l'axe de rotation est PP′. Menons Mω parallèle à PP′; la latitude λ du point M est égale à l'angle ωMy et si l'on projette la vitesse angulaire ω sur les axes, on obtient pour composantes:

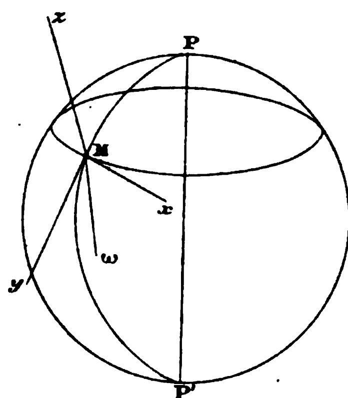


Fig. 121.

$$p = 0$$
$$q = \omega \cos \lambda$$
$$r = -\omega \sin \lambda$$

Les composantes suivant les axes de l'accélération de Coriolis dans le mouvement du point M sont par suite (**119**):

$$2\omega \left(\cos \lambda \frac{dz}{dt} + \sin \lambda \frac{dy}{dt}\right)$$
$$-2\omega \sin \lambda \frac{dx}{dt}$$
$$-2\omega \cos \lambda \frac{dx}{dt}$$

123. Équations du mouvement relatif. — Il arrive souvent que l'on connaît l'accélération absolue et le mouvement d'entraînement d'un point. Le théorème de Coriolis permet alors d'étudier le mouvement relatif.

L'équation obtenue précédemment (**118**):

$$(\gamma_a) = (\gamma_e) + (\gamma_r) + (\gamma_c)$$

peut en effet s'écrire :

$$(\gamma_r) = (\gamma_a) - (\gamma_e) - (\gamma_c)$$

ou, en multipliant par la masse m du point matériel :

$$(m\gamma_r) = (m\gamma_a) - (m\gamma_e) - (m\gamma_c)$$

Par conséquent, la force qui, agissant seule, imprimerait au mobile un mouvement absolu identique à son mouvement relatif est la somme géométrique de la force réelle, d'une première force fictive égale et contraire à celle qui produit l'accélération d'entraînement et d'une deuxième force fictive égale et contraire à celle qui produit l'accélération de Coriolis. Les équations du mouvement relatif sont alors celles du mouvement d'un mobile soumis à ces trois forces.

124. Application. — Trouver le mouvement relatif d'un mobile attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance, vu par un observateur tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe passant par le centre et placé suivant cet axe.

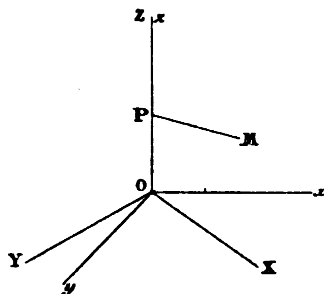


Fig. 122.

Soient $Oxyz$ (*fig.* 122) un système d'axes rectangulaires fixes dont l'origine est le centre O. Soient OXYZ un autre système d'axes rectangulaires tels que OZ soit confondu avec Oz, tournant avec l'observateur d'un mouvement uniforme autour de OZ. OX et OY sont dans le plan xOy et l'angle xOX varie proportion-

nellement au temps ; soit ωt sa valeur, ω désignant uue constante. Considérons une position quelconque M du mobile, dont les coordonnées sont x, y, z, et X, Y, Z, dans les deux systèmes. Soit P la projection du mobile M sur l'axe OZ.

La force réelle agissant sur M a pour composantes suivant les axes OXYZ :

$$\begin{cases} -mk^2X \\ -mk^2Y \\ -mk^2Z \end{cases}$$

en désignant par m la masse du point et par k un coefficient de proportionnalité.

Le point coïncidant lié au système OXYZ a un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe OZ dont l'accélération est ω^2. MP dirigée suivant MP (**30**). La force fictive égale et contraire à celle qui produit l'accélération d'entraînement a donc pour composantes suivant OX, OY, OZ :

$$\begin{cases} m\omega^2X \\ m\omega^2Y \\ 0 \end{cases}$$

Les valeurs des quantités p, q, r sont ici :

$$p = 0$$
$$q = 0$$
$$r = \omega$$

et les composantes de l'accélération de Coriolis s'en déduisent (**119**). La deuxième force fictive, égale et contraire à celle qui produirait cette accélération, a donc pour composantes

suivant OX, OY, OZ :

$$\left\{\begin{array}{l} 2m\omega \frac{dY}{dt} \\ -2m\omega \frac{dX}{dt} \\ 0 \end{array}\right.$$

Les équations générales de la dynamique donnent alors, pour définir le mouvement relatif, les trois relations :

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dt^2} = (\omega^2 - k^2)\,X + 2\omega \frac{dY}{dt}$$

$$(2) \qquad \frac{d^2Y}{dt^2} = (\omega^2 - k^2)\,Y - 2\omega \frac{dX}{dt}$$

$$(3) \qquad \frac{d^2Z}{dt^2} = -k^2Z$$

La dernière équation, intégrée, donne :

$$Z = C \cos(kt + \gamma)$$

C et γ désignant deux constantes arbitraires. Elle montre que la projection du mobile sur OZ est animée d'un mouvement oscillatoire tautochrone et isochrone, identique à celui d'un point mobile sur une droite attiré par un point de cette droite proportionnellement à la distance.

Considérons les valeurs de X et Y suivantes :

$$X = \lambda \cos(ut + \alpha)$$
$$Y = \mu \sin(ut +$$

où λ, μ et α désignent trois constantes.

Ces valeurs vérifieront les équations (1) et (2) si l'on a :

$$(4)\qquad \begin{cases} \lambda\,(u^2 + \omega^2 - k^2) + 2\omega\mu u = 0 \\ \mu\,(u^2 + \omega^2 - k^2) + 2\omega\lambda u = 0 \end{cases}$$

et ces deux équations en λ et μ se réduiront à une seule, si l'on a :

$$(5)\qquad (u^2 + \omega^2 - k^2)^2 = 4\omega^2 u^2$$

ou :

$$u = \pm\,\omega \pm k$$

L'équation (5) est vérifiée par les quatre valeurs de u obtenues en permutant les signes dans cette expression :

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega + k \\ u_2 &= \omega - k \\ u_3 &= -\,\omega + k \\ u_4 &= -\,\omega - k \end{aligned}$$

A ces quatre valeurs de u nous associerons quatre valeurs arbitraires a, b, c, d de λ. L'une des équations (4) donne alors pour valeurs correspondantes de μ:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\,a \\ \mu_2 &= -\,b \\ \mu_3 &= c \\ \mu_4 &= d \end{aligned}$$

Nous en déduisons quatre systèmes de valeurs d'X et Y

vérifiant les équations (1) et (2), qui sont les suivants :

$$\begin{cases} X_1 = a\cos[(\omega+k)t+\alpha] \\ Y_1 = -a\sin[(\omega+k)t+\alpha] \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_2 = b\cos[(\omega-k)t+\beta] \\ Y_2 = -b\sin[(\omega-k)t+\beta] \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_3 = c\cos[(\omega-k)t-\gamma] \\ Y_3 = -c\sin[(\omega-k)t-\gamma] \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_4 = d\cos[(\omega+k)t-\delta] \\ Y_4 = -d\sin[(\omega+k)t-\delta] \end{cases}$$

α, β, γ, δ désignant des constantes arbitraires. Les systèmes X_1, Y_1, X_4, Y_4, sont les mêmes, ainsi que les systèmes X_2, Y_2, X_3, Y_3; ces quatre systèmes se réduisent donc aux deux premiers qui sont deux solutions particulières des équations (1) et (2) ; la solution la plus générale de cette équation, qui doit contenir quatre constantes arbitraires, s'obtient en les ajoutant. Les équations du mouvement relatif sont, par suite:

$$X = a\cos[(\omega+k)t+\alpha] + b\cos[(\omega-k)t+\beta] \tag{6}$$
$$Y = -a\sin[(\omega+k)t+\alpha] - b\sin[(\omega-k)t+\beta] \tag{7}$$
$$Z = C\cos(kt+\gamma) \tag{8}$$

Les premiers et les seconds termes du second membre de (6) et (7) égalés séparément à X et Y représentent chacun un mouvement circulaire uniforme ; la projection du point M sur XOY décrit par conséquent un mouvemnt uniforme, une circonférence dont le centre se déplace lui-même d'un mouvement uniforme sur une autre circonférence. On sait d'ailleurs que la trajectoire absolue est une ellipse.

125. Accélérations d'ordres supérieurs.— *L'accélération du second ordre* est la vitesse du mobile obtenu en menant à chaque instant par un point fixe une droite égale et parallèle à l'accélération première du mobile considéré. *L'accélération d'ordre n* se déduit de même de l'accélération d'ordre $n-1$; on a, par suite, pour expressions des composantes suivant les axes de l'accélération d'ordre n, γ_n :

$$\gamma_{n,x} = \frac{d^n x}{dt^n}$$

$$\gamma_{n,y} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

$$\gamma_{n,z} = \frac{d^n z}{dt^n}$$

Il est utile de pouvoir déduire les composantes de γ_{n+1}, dans un système d'axes mobiles défini à chaque instant, de celles de γ_n dans le même système.

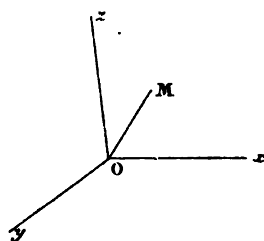


Fig. 123.

Soit donc $Oxyz$ (*fig.* 123) un système d'axes mobiles, dont nous supposerons l'origine fixe puisque nous cherchons seulement les projections de γ_{n+1}. Soit OM un segment égal et parallèle à γ_n dont l'extrémité a pour coordonnées $\gamma_{n,x}$, $\gamma_{n,y}$, $\gamma_{n,z}$. La vitesse relative de M a pour projections :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\gamma_{n,x}}{dt} \\[2mm] \dfrac{d\gamma_{n,y}}{dt} \\[2mm] \dfrac{d\gamma_{n,z}}{dt} \end{array}\right.$$

et sa vitesse d'entraînement, qui résulte d'une rotation autour d'un axe de paramètres p, q, r, a pour projections :

$$\left\{\begin{array}{l} q\gamma_{n,z} - r\gamma_{n,y} \\ r\gamma_{n,x} - p\gamma_{n,z} \\ p\gamma_{n,y} - q\gamma_{n,x} \end{array}\right.$$

On a, par suite, les formules importantes :

$$\gamma_{n+1,x} = \frac{d\gamma_{n,x}}{dt} + q\gamma_{n,z} - r\gamma_{n,y}$$

$$\gamma_{n+1,y} = \frac{d\gamma_{n,y}}{dt} + r\gamma_{n,x} - p\gamma_{n,z}$$

$$\gamma_{n+1,z} = \frac{d\gamma_{n,z}}{dt} + p\gamma_{n,y} - q\gamma_{n,x}$$

Tout revient donc à déterminer les composantes p,q,r de la vitesse de rotation qui correspond au système d'axes mobiles choisi.

126. Applications. — 1° Supposons que les axes mobiles soient définis de la façon suivante : ox est parallèle à la tangente à la trajectoire, tangente menée dans le sens où s'effectue le mouvement, oy est parallèle à la normale principale menée dans le sens de la concavité de la trajectoire, et enfin oz est une parallèle à celle des deux directions de la binormale qui forme avec la tangente et la normale principale un trièdre trirectangle offrant la disposition habituelle.

Considérons un déplacement infiniment petit du mobile. On peut le regarder comme s'effectuant dans le plan osculateur et l'obtenir au moyen de trois rotations consécutives autour des axes ox, oy, oz. Les composantes p, q, r de ces rotations sont faciles à déterminer. En effet, lorsque le

mobile passe de sa position initiale à la position infiniment voisine, la normale principale tourne autour de oz d'un angle $d\sigma$ égal à l'angle de contingence de la trajectoire et qui, par suite, a pour valeur $\frac{ds}{R}\cdot$ Or :

$$r = \text{limite}\ \frac{d\sigma}{dt} = \text{limite}\ \frac{\frac{ds}{R}}{dt} = \frac{v}{R}$$

D'autre part, le mouvement du plan osculateur peut être regardé comme un mouvement de glissement suivi d'un mouvement de rotation autour de la tangente. L'angle $d\varpi$ de cette rotation, qui n'est autre que l'angle de torsion de la trajectoire, a par suite pour valeur $\frac{ds}{T}\cdot$ Donc :

$$p = \text{limite}\ \frac{d\varpi}{dt} = \text{limite}\ \frac{ds}{dt}\cdot\frac{1}{T} = \frac{v}{T}$$

La composante de la rotation autour de oy est nulle. Donc, en appliquant les formules générales, on a :

$$\gamma_{n+1,x} = \frac{d\gamma_{n,x}}{dt} - \frac{v}{R}\gamma_{n,y}$$

$$\gamma_{n+1,y} = \frac{d\gamma_{n,y}}{dt} + \frac{v}{R}\gamma_{n,x} - \frac{v}{T}\gamma_{n,z}$$

$$\gamma_{n+1,z} = \frac{d\gamma_{n,z}}{dt} + \frac{v}{T}\gamma_{n,y}$$

En faisant dans ces formules successivement $n = 0, n = 1$, et partant des relations connues :

$$\gamma_{0,x} = v \qquad \gamma_{0,y} = 0 \qquad \gamma_{0,z} = 0$$

qui expriment que la vitesse est dirigée suivant la tangente,

on trouvera :

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_{1,x} &= \frac{dv}{dt} \\ \gamma_{1,y} &= \frac{v^2}{R} \\ \gamma_{1,z} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_{2,x} &= \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2} \\ \gamma_{2,y} &= 3\frac{v}{R}\frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{R^2}\frac{dR}{dt} = 3\frac{v}{R}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{R^2}\frac{dR}{ds} \\ \gamma_{2,z} &= \frac{v^3}{RT} \end{aligned}\right.$$

2° Considérons trois familles de surfaces orthogonales définies par les paramètres λ_1, λ_2, λ_3 telles qu'il passe une surface de chaque famille par un point quelconque de l'espace. Prenons pour axes de coordonnées les tangentes aux courbes d'intersection de ces surfaces deux à deux. Pour évaluer les quantités p, q, r relatives à un déplacement infiniment petit du mobile, imaginons ce déplacement décomposé en trois autres ds_1, ds_2, ds_3 suivant les directions Mn_1, Mn_2, Mn_3 (*fig.* 124). Les courbes d'intersection des surfaces deux à deux étant, d'après le théorème de Dupin, des lignes de courbure de ces surfaces, sont tangentes aux sections principales. Désignons par R_{ik} le rayon de courbure de la section principale faite dans la surface d'indice i

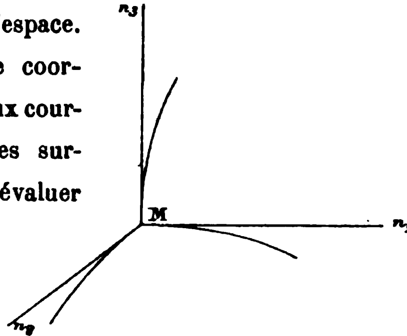


Fig. 124.

et qui admet pour tangente la normale à la surface d'indice k. Nous admettrons que les normales sont menées dans le sens où λ_1, λ_2, λ_3 croissent et nous regarderons un rayon de courbure comme positif s'il est porté sur la normale dans le sens positif.

Ceci posé, le déplacement ds_1 fait tourner Mn_2 dans le plan n_2Mn_1, et par conséquent autour de Mn_3, d'un angle précisément égal à l'angle de contingence de la section principale Mn_2, Mn_1 et qui, par suite, a pour valeur $\frac{ds_1}{R_{2,1}}$, rotation positive, si on regarde la concavité comme tournée du côté de Mn_2. De même, Mn_3 tourne autour de Mn_2 d'un angle égal à l'angle de contingence de la section principale Mn_3, Mn_1 qui a pour valeur $-\frac{ds_1}{R_{3,1}}$.

Le déplacement ds_1 donne donc lieu aux composantes :

$$p_1 = 0$$
$$q_1 = -\text{ limite } \frac{ds_1}{dt}\cdot\frac{1}{R_{3,1}} = -\frac{v_1}{R_{3,1}}$$
$$r_1 = \text{ limite } \frac{ds_1}{dt}\cdot\frac{1}{R_{2,1}} = \frac{v_1}{R_{2,1}}$$

En raisonnant de même, on trouverait pour les rotations partielles dues aux déplacements ds_2, ds_3 :

$$p_2 = \frac{v_2}{R_{3,2}}$$
$$q_2 = 0$$
$$r_2 = -\frac{v_2}{R_{1,2}}$$
$$p_3 = -\frac{v_3}{R_{2,3}}$$
$$q_3 = \frac{v_3}{R_{1,3}}$$
$$r_3 = 0$$

Donc :

$$p = \frac{v_2}{R_{3,2}} - \frac{v_3}{R_{2,3}}$$

$$q = -\frac{v_1}{R_{3,1}} + \frac{v_3}{R_{1,3}}$$

$$r = \frac{v_1}{R_{2,1}} - \frac{v_2}{R_{1,2}}$$

Supposons qu'on veuille faire l'application aux coordonnées polaires de l'espace. On devra faire :

$$\gamma_{o,x} = v_1 = \rho'$$

$$\gamma_{o,y} = v_2 = \rho\theta'$$

$$\gamma_{o,z} = v_3 = \rho \sin \theta\psi'$$

Les rayons de courbure $R_{1,2}$, $R_{1,3}$ sont les rayons de courbure des sections principales faites dans la sphère de rayon ρ. Par suite :

$$R_{1,2} = R_{1,3} = \rho$$

et comme ces rayons sont dirigés du côté où ρ diminue, on doit les regarder comme égaux chacun à $-\rho$.

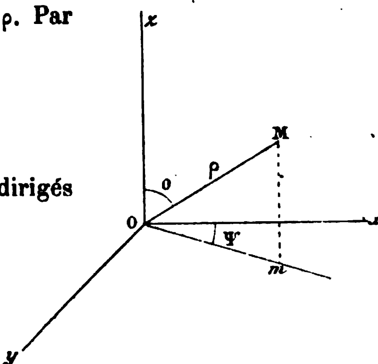


Fig. 125.

$R_{2,1}$, $R_{2,3}$ sont les rayons de courbure principaux de la surface $\theta = C^{te}$. La section principale du cône qui admet pour tangente la normale à la sphère est une droite, donc $R_{2,1} = \infty$; la deuxième section principale admet pour tangente la tangente au paral-

lèle. Donc, d'après le théorème de Meusnier :

$$R_{2,3} = \rho \operatorname{tg} \theta$$

et, comme ce rayon de courbure est dirigé du côté où θ diminue, il faut prendre $-\rho \operatorname{tg} \theta$.

Les deux sections principales de la surface $\psi = C^{te}$ ne sont autres que des droites, donc $R_{3,1} = \infty$, $R_{3,2} = \infty$. Donc :

$$p = \frac{\rho \sin \theta . \psi'}{\rho \operatorname{tg} \theta} = \cos \theta . \psi'$$

$$q = -\frac{\rho \sin \theta . \psi'}{\rho} = -\sin \theta . \psi'$$

$$r = \frac{-\rho \theta'}{-\rho} = \theta'$$

Par suite :

$$\gamma_{1,x} = \rho'' - \rho \sin^2 \theta . \psi'^2 - \rho \theta'^2$$

$$\gamma_{1,y} = \rho \theta'' + 2\rho' \theta' - \rho \sin \theta \cos \theta . \psi'^2$$

$$\gamma_{1,z} = \rho \sin \theta . \psi'' + 2 \sin \theta . \rho' \psi' + 2\rho \cos \theta . \theta' \psi' = \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{d}{dt} (\rho^2 \sin^2 \theta . \psi')$$

résultats trouvés précédemment (**121**). La méthode que nous venons de suivre a l'avantage de faire connaître, sans raisonnement nouveau, les accélérations d'ordre supérieur.

MÉCANISMES

127. Dans la nature, on observe diverses causes de mouvement : la chaleur, l'électricité, etc. Les organes destinés à exécuter des transformations de mouvement s'appellent des machines. Les mouvements observés dans les machines sont de deux sortes : les mouvements continus et les mouvements alternatifs. Les plus fréquemment employés sont d'ailleurs rectilignes ou circulaires, ce qui donne lieu aux quatre catégories suivantes :

1° Mouvement rectiligne continu ;

2° Mouvement circulaire continu ;

3° Mouvement rectiligne alternatif ;

4° Mouvement circulaire alternatif.

On peut se proposer de transformer un quelconque de ces mouvements en lui-même ou bien en un quelconque des trois autres, ce qui donne lieu à seize transformations de mouvements indiquées dans le tableau suivant :

	R.C	C.C	R.A	C.A
R.C				
C.C				
R.A				
C.A				

128. Transformation d'un mouvement rectiligne continu en un mouvement rectiligne continu. — On emploie, pour réaliser cette transformation, soit une poulie fixe, soit une poulie mobile, soit des moufles.

Poulie fixe. — La poulie fixe se compose d'une roue circulaire AOB qui a la liberté de tourner dans un plan autour du centre fixe O et dont la circonférence est embrassée en partie par une corde tirée à ses extrémités par deux forces tangentielles P et Q. L'un des brins de la corde ayant un mouvement rectiligne continu, il en sera de même de l'autre.

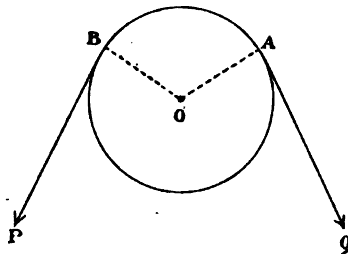


Fig. 126.

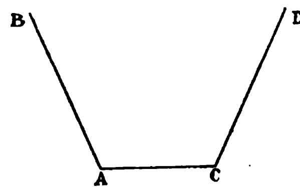


Fig. 127.

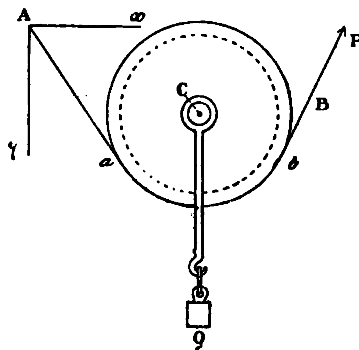


Fig. 128.

Si la transformation doit s'effectuer suivant une direction CD non située dans le même plan avec la direction AB, il suffit d'employer deux poulies fixes dont les axes sont respectivement perpendiculaires aux deux plans déterminés par une droite AC s'appuyant sur AB et CD.

Poulie mobile. — Dans la poulie dite mobile, un poids Q est suspendu à une chape par un crochet ou cordon, dont la direction coïncide avec la verticale du centre C, et la corde qui embrasse la partie inférieure *ab* de la gorge est d'une part attachée à un point fixe A, de l'autre tirée par une puissance P suivant la tangente *b*B.

La poulie mobile a sur la poulie fixe un avantage dont il est facile de se rendre compte. En effet, dans la poulie fixe, en regardant le poids du fil comme négligeable, l'équilibre a lieu lorsque

$$P = Q$$

Dans la poulie mobile, au contraire, la masse du fil étant toujours considérée comme négligeable, les tensions des deux cordons sont égales, et égales chacune à P. Si donc on désigne par α l'angle xAa, on voit, en projetant sur l'horizontale Ax toutes les forces qui agissent sur la poulie, que l'inclinaison du cordon *b*B est aussi α. Si l'on projette sur la verticale Ay, on voit qu'il y a équilibre lorsqu'on a :

$$Q = 2P \sin \alpha$$

$$P = \frac{Q}{2 \sin \alpha}$$

L'effort nécessaire pour soulever un poids donné Q peut donc être diminué en employant la poulie mobile au lieu de la poulie fixe.

On peut se proposer, connaissant l'angle α, et supposant que le point d'application de la puissance P éprouve un déplacement arbitraire infiniment petit $\delta\sigma$ suivant la direction de cette force, à partir de la position d'équilibre, de trouver le déplacement du point C, de coordonnées X, Y, relativement

aux axes Ax et Ay. A cet effet nous supposerons la puissance appliquée en un point fixe B du cordon et nous appliquerons le principe du travail virtuel qui donne :

$$P.\delta\sigma + Q.\delta Y = 0$$

Or, puisqu'il y a équilibre

$$2P.\sin\alpha = Q$$

En éliminant P et Q entre ces deux équations, on trouve :

$$\delta Y = -\frac{\delta\sigma}{2\sin\alpha}$$

On aurait pu arriver à ce résultat par la géométrie.

Désignons par x, y les coordonnées du point P et posons :

$$Aa = u \qquad bB = u'$$

Le théorème des projections appliqué au contour AabP donne :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = (u + u')\cos\alpha + 2R\sin\alpha \\ y = (u - u')\sin\alpha \\ Y = u\sin\alpha - R\cos\alpha \end{cases}$$

Mais le fil a une longueur constante, donc :

$$(2) \qquad u + u' + 2R\alpha = s$$

Différentions les équations (1) ; il vient :

$$\delta x = (\delta u + \delta u')\cos\alpha - (u + u')\sin\alpha.\delta\alpha + 2R\cos\alpha.\delta\alpha$$
$$\delta y = (\delta u - \delta u')\sin\alpha + (u - u')\cos\alpha.\delta\alpha$$
$$\delta Y = \delta u\sin\alpha + R\sin\alpha.\delta\alpha + u\cos\alpha.\delta\alpha$$

Or :

$$\delta\sigma = \delta x\cos\alpha - \delta y\sin\alpha$$

Donc :

$$\delta\sigma = \delta u \cos 2\alpha + \delta u' - u \sin 2\alpha . \delta\alpha + 2R \cos^2 \alpha . \delta\alpha$$

Ou, en remplaçant $\delta u'$ par la valeur obtenue en différentiant l'équation (2) :

$$\delta\sigma = - 2 \sin \alpha \, \{\delta u \sin \alpha + R \sin \alpha . \delta\alpha + u \cos \alpha . \delta\alpha\}$$

$$\delta\sigma = - 2 \sin \alpha . \delta Y$$

résultat obtenu précédemment.

Moufles. — Une moufle est l'assemblage de plusieurs poulies réunies dans une même chape et ordinairement sur le même axe, mais libres de tourner indépendamment les unes des autres. La chape de la moufle supérieure est accrochée à un corps fixe.

La moufle inférieure est mobile et sa chape porte un crochet auquel on suspend le fardeau à élever. Une corde tirée à l'une de ses extrémités par la puissance P embrasse successivement toutes les poulies en passant de la moufle fixe à la moufle mobile, et vice versa, et vient finalement s'attacher à la chape de la poulie fixe. L'équilibre général du système exige évidemment que chaque poulie soit séparément en équilibre, et comme c'est la même corde qui les embrasse toutes, il est clair qu'elle est partout également tendue. Le poids Q est donc sensiblement dans les mêmes conditions que s'il était soutenu par un système de forces parallèles toutes égales à la puissance P et en même nombre que les cordons qui vont directement d'une moufle à l'autre. Soit n le

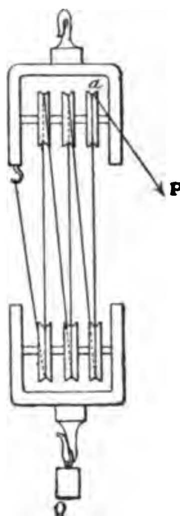


Fig. 129.

nombre des poulies de chaque moufle, on a alors :

$$Q = 2nP$$

d'où :

$$P = \frac{Q}{2n}$$

Si la force P parcourt un chemin représenté par d, la force Q parcourera un chemin représenté par $\frac{d}{2n}$ d'après le principe suivant. Si la portion a P du cordon s'allonge de d, le reste doit se raccourcir de la même quantité. Or, les diverses parties du cordon doivent rester tendues et sensiblement parallèles ; elles doivent donc se raccourcir chacune de $\frac{d}{2n}$.

129. Transformation d'un mouvement rectiligne continu en un mouvement circulaire continu. — Les *roues hydrauliques* transforment le mouvement rectiligne continu de l'eau en un mouvement circulaire continu qui n'est autre que celui de la roue. La même transformation s'effectue dans les *moulins à vent* et les *horloges à poids*.

130. Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne continu. — L'appareil qui réalise cette transformation est le *treuil*.

Le treuil est un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe. Il a ordinairement la forme d'un cylindre horizontal AB, dit arbre du treuil, terminé à ses extrémités par deux autres cylindres, de même axe, mais d'un diamètre plus petit, nommés tourillons, qui reposent sur deux coussinets fixes, de même forme. La résistance à vaincre est un fardeau Q suspendu à une corde qui fait plusieurs tours sur l'arbre et est attachée par un bout à sa surface. La puissance P est appliquée dans un

plan perpendiculaire à l'axe de rotation au moyen d'une manivelle M, tige montée perpendiculairement sur cet axe et armée d'une manette horizontale. La condition d'équilibre de cet appareil est la suivante :

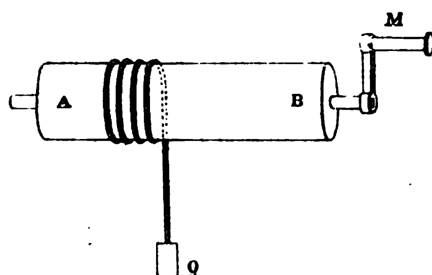


Fig. 130.

$$\frac{Q}{P} = \frac{R}{r}$$

R et r désignant les rayons de la manivelle et du cylindre sur lequel est enroulée la corde.

Treuil différentiel. — L'arbre est formé de deux cylindres de diamètres différents. Le câble s'enroule d'abord sur le cylindre de plus grand diamètre, vient ensuite passer sur une poulie qui porte le poids Q à soulever et de là vient s'enrouler dans un sens inverse du premier sur le cylindre de plus petit diamètre. Soient r et r' les rayons des deux cylindres qui constituent l'arbre du treuil; R celui de la manivelle. Pour un tour fait par la manivelle, la puissance P a effectué un chemin égal à $2\pi R$. L'arbre du treuil a exécuté lui aussi un tour, c'est-à-dire que le câble s'est enroulé de $2\pi r$

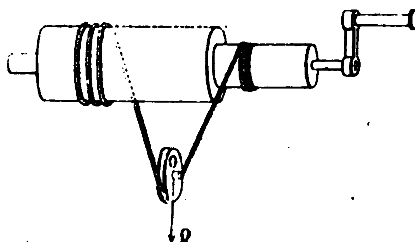


Fig. 131.

et déroulé de $2\pi r'$. Le poids Q s'est donc élevé de

$$2\pi(r - r')$$

Si l'on prend le rapport $\frac{2\pi(r - r')}{2\pi R}$ du déplacement de Q au déplacement de P, on voit que, si $r - r'$ est suffisamment petit, le rapport $\frac{P}{Q}$ sera aussi petit qu'on voudra et il en sera de même de la puissance P nécessaire pour soulever un poids donné Q.

Le *cric*, destiné à soulever des fardeaux considérables, réalise aussi cette transformation.

Vis. — La vis est encore utilisée pour le même usage dans les appareils de précision. Elle est engendrée de la manière suivante. Dans le plan d'une section passant par l'axe d'un cylindre circulaire droit est dessiné un triangle isocèle ou un carré dont la base est parallèle à l'axe; cette figure est le *profil du filet* de la vis; si son plan tourne autour de l'axe d'un mouvement de rotation uniforme, en même temps qu'il se déplace lui-même d'un mouvement de translation uniforme parallèle à l'axe, ce profil engendre la vis; le mouvement de translation est déterminé suivant la grandeur que l'on veut donner au *pas* de la vis, c'est-à-dire à la distance qui sépare deux points homologues du profil du filet après une rotation de 360°. La vis traverse une pièce, appelée *écrou*, qui présente en creux la même figure qu'elle et dans laquelle elle s'adapte exactement. Si l'écrou est fixe, une rotation imprimée à la tête de la vis communique à son extrémité un mouvement de translation. Si, au contraire, la vis, butant contre un obstacle fixe, ne peut prendre qu'un mouvement de rotation, l'écrou, mobile et maintenu par des glissières parallèles à l'axe de la vis, aura un mouvement de translation parallèle à cet axe.

Vis différentielle. — La vis différentielle permet d'imprimer de très petits déplacements à l'écrou, ce que l'on ne pourrait obtenir en diminuant indéfiniment le pas, qui doit toujours rester tel que les spires saillantes ne se rencontrent pas. A cet effet, les extrémités A et B (*fig.* 132) de la vis, passant dans des écrous fixes, ont des pas égaux et comptés entre des hélices tracées dans le même sens ; le milieu de la vis, qui traverse un écrou mobile C, a un pas différent, compté entre

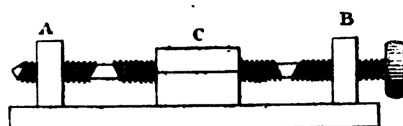


Fig. 132.

des hélices tracées en sens contraire du précédent. Soient h, h' ces deux pas.

Pour un tour complet de la tête de la vis, le déplacement de la vis est h; celui de l'écrou est en sens contraire et vaut h'. Le déplacement total est donc $h' - h$; en modifiant convenablement h et h', on peut le rendre aussi petit qu'on veut.

131. Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire continu. — Si les axes des deux mouvements sont parallèles et éloignés l'un de l'autre, la transformation s'effectue à l'aide de *courroies de transmission* qui s'enroulent sur deux roues centrées sur les axes ; elle sont dirigées suivant les tangentes extérieures ou intérieures aux circonférences de ces roues suivant que les deux mouvements doivent être de même sens ou de sens contraire. Elles sont tendues de manière à ne pouvoir glisser ;

un levier appuyant sur la courroie par une de ses extrémités et portant à l'autre un poids mobile, permet d'augmenter la tension de la courroie, qui tend toujours à s'allonger.

La *chaîne de Vaucanson*, dont les mailles engrènent avec les dents de deux roues centrées sur les axes remplace quelquefois la courroie de transmission.

Quand les deux axes sont suffisamment rapprochés, on communique directement le mouvement par un *engrenage* formé de deux roues dentées. Soient A, B (*fig.* 133) les traces des deux axes sur un plan perpendiculaire à ces axes : deux circonférences tangentes de centres A, B seront appelées *cercles primitifs* de l'engrenage ; leurs rayons sont inverse-

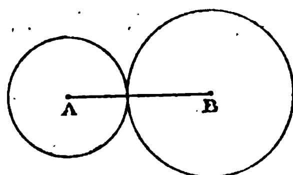


Fig. 133.

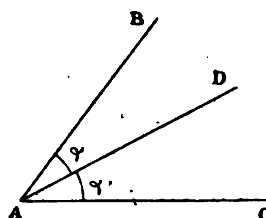


Fig. 134.

ment proportionnels aux vitesses angulaires des deux mouvements, de sorte que ceux de leurs points qui sont en contact ont même vitesse linéaire. La détermination du profil des dents qu'il faudra dessiner sur ces deux cercles est un problème important que nous traiterons plus loin.

Si les axes AB, AC (*fig.* 134) sont concourants, une droite AD située dans leur plan à l'intérieur de l'angle BAC, engendrera, en tournant autour de AB et AC, deux cônes de révolution tangents suivant AD. Des dents creusées sur une por-

tion de ces deux cônes permettent de transmettre le mouvement et constituent un *engrenage conique*. Les points des deux cônes confondus en D ont même vitesse linéaire ; par suite, en appelant ω, ω' les vitesses angulaires des deux mouvements, α, α' les angles d'ouverture des cônes considérés, on a :

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha'$$

Cette égalité détermine le rapport

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}$$

lorsque les vitesses angulaires sont connues.

Si les axes AB, CD (*fig.* 134) ne sont pas concourants, un double engrenage conique réalise la transformation du mouvement. Soient AC une droite rencontrant AB et CD, AE, CE' deux droites analogues à la droite AD (*fig.* 135) relatives aux axes AB, AC et AC, CD. En appelant ω, ω', ω_1 les vitesses angulaires de rotation d'axes AB, CD, AC, α, α', α_1, α'_1 les angles d'ouverture des cônes considérés, on a, comme précédemment :

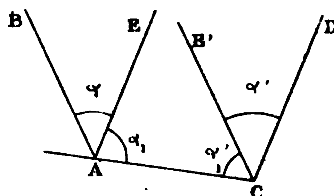


Fig. 135.

$$\omega \sin \alpha = \omega_1 \sin \alpha_1$$
$$\omega_1 \sin \alpha'_1 = \omega' \sin \alpha'$$

d'où l'on déduit :

$$\omega \sin \alpha \sin \alpha'_1 = \omega' \sin \alpha' \sin \alpha_1$$

Cette égalité détermine le rapport

$$\frac{\sin \alpha \sin \alpha_1'}{\sin \alpha' \sin \alpha_1}$$

lorsque les vitesses ω, ω' sont connues ; elle montre que l'une des droites AE, CE' peut avoir une position arbitraire dans les angles BAC, ACD.

Le *joint brisé* ou *joint universel de Cardan*, utilisé dans les instruments d'astronomie, est encore une solution de ce problème de transformation. L'axe A (*fig.* 136) du premier mouvement est terminé par une fourchette *pab ;* les extrémités *a*, *b* sont traversées par l'une des branches d'un *croisillon*, dont l'autre branche *cd*, perpendiculaire à la première, lui est invariablement liée en son milieu O ; la branche *ab* peut tourner librement autour des points *a*, *b* de façon que *cd* décrive un plan perpendiculaire à *ab*. L'axe B du second mouvement se termine aussi par une fourchette *qcd* et s'articule de la même manière avec le croisillon. Cette disposition permet de faire varier, dans une certaine mesure, l'angle des deux axes A, B.

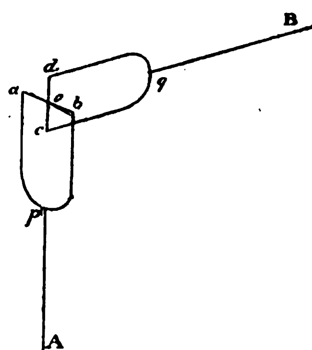


Fig. 136.

L'étude de ces appareils sera complétée plus loin.

132. Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne alternatif. — Soit

A (*fig.* 137) la trace de l'axe du mouvement circulaire sur un plan perpendiculaire à cet axe. Si, à l'extrémité B d'une manivelle AB, fixée à l'axe en A, est articulée une *bielle* BC, dont l'extrémité C est assujettie à décrire une droite EF du plan, ce point C décrit la droite EF d'un mouvement alternatif, pendant que B décrit une circonférence, et cet appareil réalise la transformation. Considérons la droite BC comme une figure mobile dans un plan ; son centre instantané I est

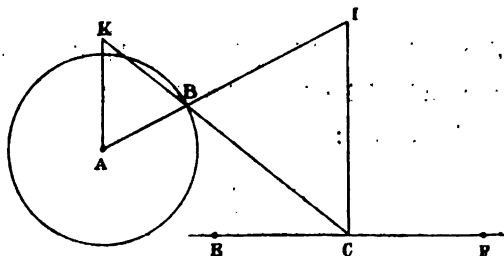


Fig. 137.

à l'intersection de AB et de CI perpendiculaire à EF. En désignant par ω la vitesse angulaire de BC, la vitesse de B est donc :

$$\omega.\mathrm{BI}$$

D'autre part, elle est encore égale à

$$\Omega.\mathrm{AB}$$

en appelant Ω la vitesse angulaire du mouvement circulaire. Cette vitesse Ω doit être regardée comme constante ; on cherche à obtenir ce résultat dans la pratique par l'emploi des volants et des régulateurs. De ces deux expressions de la

vitesse de B, on déduit :

$$\omega = \Omega \cdot \frac{AB}{BI}$$

La vitesse de C est par suite :

$$\omega.CI$$

ou :

$$\Omega.AB \cdot \frac{CI}{BI}$$

Or, si l'on prolonge BC jusqu'à son point de rencontre K avec AK perpendiculaire à EF, les deux triangles BAK, BCI étant semblables, on a :

$$\frac{CI}{BI} = \frac{AK}{AB}$$

La vitesse de C a donc pour expression :

$$\Omega.AK$$

Elle est proportionnelle au segment AK. Elle s'annule lorsque AB et BC viennent dans le prolongement l'un de

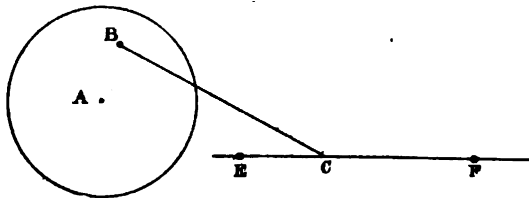


Fig. 138.

l'autre, ce qui se produit deux fois, quand le point C occupe les positions E et F qui limitent sa course. Ces points sont

appelés *points morts*, parce que le déplacement de C ne détermine plus alors le sens de la rotation de B.

Si le moyeu A de la manivelle est rendu assez grand pour contenir le bouton B (*fig.* 138), on obtient une autre disposition de l'appareil où la manivelle est remplacée par un plateau circulaire.

Si, au contraire, le bouton B est rendu assez grand pour

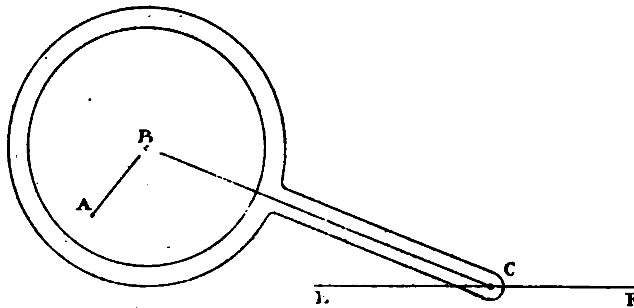


Fig. 139.

contenir le moyeu A (*fig.* 139), l'appareil prend le nom d'*excentrique;* la goupille du bouton B est devenue un disque circulaire, contenant le point A, entouré d'un collier auquel s'attache la tige CD. En joignant les points AB, BC, on reconstitue la figure de la simple bielle, et la théorie du mouvement est la même. L'excentrique a l'avantage de pouvoir s'appliquer à un point quelconque de l'arbre qui transmet le mouvement de rotation, tandis que la manivelle ne peut être reliée qu'à son extrémité.

L'*excentrique à came* ou *excentrique à cœur* se compose d'un plateau terminé par une courbe telle que tous les diamètres passant par la trace O (*fig.* 140) de l'axe de rotation soient égaux. Une moitié G'AG de cette courbe peut être tracée arbi-

trairement. L'autre moitié est obtenue en prolongeant les rayons vecteurs M_1O, M_2O,... de G'AG jusqu'en M'_1, M'_2,... de façon que $M_1M'_1$, $M_2M'_2$,... soient égaux. Sur cette pièce, qui fait corps avec l'arbre qui transmet le mouvement, roulent deux galets G, G' réunis ensemble par une tige maintenue par une glissière qui lui permet de se déplacer suivant la direction G'G. Le mouvement du plateau communique alors un mouvement rectiligne alternatif à GG' et l'on peut réaliser ainsi un mouvement alternatif s'effectuant suivant une loi quelconque. Il suffit pour cela, en supposant la rotation uniforme, de prendre pour valeurs des rayons vecteurs OM_1, OM_2..., correspondant à des angles $G'OM_1$, $G'OM_2$,... en progression arithmétique, c'est-à-dire à des intervalles de temps égaux, les longueurs r_1, r_2,... auxquelles doit devenir égale successivement la distance OG' dans le mouvement considéré. On obtient ainsi des points M_1, M_2,... de la courbe G'AG aussi rapprochés que l'on veut ; ce qui permet de la tracer. Si, par exemple, cette courbe est une spirale d'Archimède, dont l'équation polaire est :

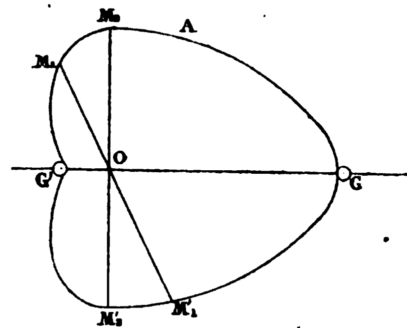


Fig. 140.

$$r = a\theta + b$$

la distance OG' variera proportionnellement au temps et le mouvement alternatif sera uniforme. Si une portion de la

courbe est un arc de circonférence de centre O, le point G' restera immobile pendant un certain intervalle de temps, et son mouvement sera intermittent.

133. Autres transformations. — La transformation du mouvement circulaire continu en mouvement circulaire alternatif s'effectue au moyen d'une manivelle OA (*fig.* 141) fixée en O à l'axe de rotation, reliée par une tige articulée en A et B à un *balancier* BC. C'est une tige mobile autour du point C et assez longue pour que le point B ne décrive qu'une portion du cercle de centre C. Cette transformation est encore réalisée dans les pendules à l'aide de l'*échappement à ancre*.

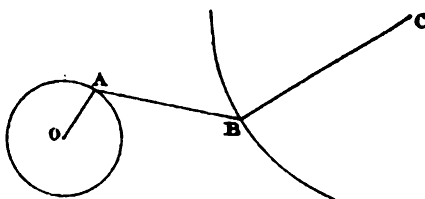


Fig. 141.

La transformation du mouvement rectiligne alternatif en mouvement rectiligne continu est celle qu'effectuent les *marteaux-pilons* ou les *moutons* destinés à enfoncer des pieux dans le sol.

La transformation très fréquente du mouvement rectiligne alternatif en mouvement circulaire continu est réalisée par les mêmes appareils que la transformation inverse.

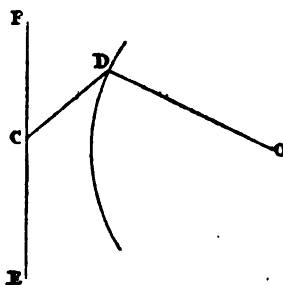


Fig. 142.

La transformation du mouvement rectiligne alternatif en mouvement circulaire alternatif peut être obtenue à l'aide

d'une bielle CD (*fig.* 142) dont une extrémité C est maintenue dans une glissière rectiligne EF et d'un balancier mobile autour de O et articulé à la bielle en D. Mais un tel système développe de grands frottements, et l'on emploie de préférence un système d'articulation particulier, appelé *parallélogramme de Watt.* A l'extrémité du balancier est ajusté un système de trois tiges formant avec le balancier un parallélogramme articulé en A, B, C, D (*fig.* 143). Le point D est de plus relié par une tige également articulée en D à un point fixe E. Ce point D est alors assujetti à décrire un cercle; et le point B, qui participe au mouvement alternatif du balancier, parcourt une courbe dite à *longue inflexion*, qui peut être assimilée à une droite sur une assez grande longueur. Cette solution approchée de la question suffit dans la pratique; nous reviendrons plus loin sur l'étude de cet appareil.

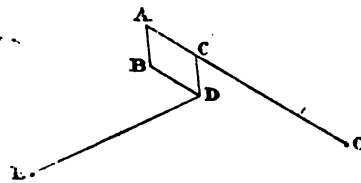


Fig. 143.

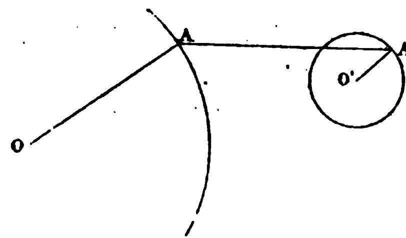


Fig. 144.

La transformation du mouvement circulaire alternatif en mouvement circulaire continu s'effectue à l'aide des mêmes appareils que la transformation inverse: le balancier peut être remplacé par une pédale; c'est ce qui a lieu dans le *tour à pédale.*

La transformation du mouvement circulaire alternatif en mouvement circulaire alternatif s'obtient à l'aide de deux balanciers OA, O'A' (*fig.* 144) reliés par une bielle AA'; les rayons OA, O'A', peuvent être différents, mais l'amplitude des oscillations de OA doit être assez petite pour que le point A' décrive seulement une portion de la circonférence de centre O'.

ÉTUDE DES ENGRENAGES

184. Engrenages cylindriques. — Les engrenages servent, comme nous l'avons vu (**181**), à transformer un mouvement circulaire continu en un autre mouvement circulaire continu; le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ des vitesses de ces deux mouvements est déterminé dans la pratique, et celui des rayons des cercles primitifs s'en déduit par la relation :

$$R\omega = R'\omega'$$

Si les cercles primitifs sont extérieurs, les deux mouvements sont de sens contraire. Pour avoir deux mouvements de même sens, il faut prendre les cercles primitifs tangents intérieurement, ou placer entre les deux un troisième cercle O″ (*fig.* 145) tangent aux deux premiers; les vitesses étant les mêmes en A et B, on a, en désignant par R_1 le rayon du cercle O″ et par

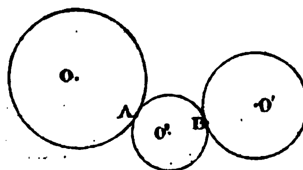


Fig. 145.

ω_1 la vitesse angulaire de rotation de l'axe O″ :

$$R\omega = R_1\omega_1 = R'\omega'$$

La relation précédente subsiste donc quel que soit le nombre des rouages parasites analogues à O″; si ce nombre est impair, les mouvements de rotation de O et O′ sont de même sens; s'il est pair les mouvements sont de sens contraire.

135. Profil des dents. — Pour la régularité du mouvement, il faut que les dents de l'engrenage soient toujours en contact; cette première condition servira à déterminer la forme des dents. Le point commun A (*fig.* 146) aux deux cercles a la même vitesse dans les deux mouvements; un observateur entraîné avec le cercle O voit ce point se déplacer avec une vitesse constante sur la circonférence O. Pour cet observateur, le mouvement apparent de O′ est alors un roulement sur le cercle O. Soit AP le profil donné pour une dent du cercle O′; une dent de O doit lui être tangente et, par suite, avoir pour profil l'enveloppe de AP dans le roulement de O′ sur O. Soit A_1 une autre position du point de contact dans ce mouvement relatif, *ap* la position correspondante de la courbe AP; la normale A_1s à *ap* tombe au point de contact *s* de *ap* avec son enveloppe. *s* est donc

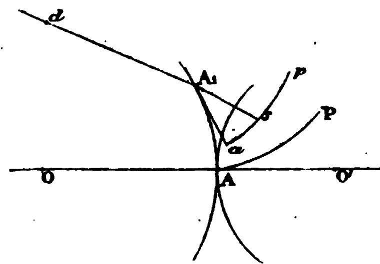


Fig. 146.

un point du profil de la dent de O, ou *profil conjugué* de AP.

On en déduit un tracé du profil conjugué de AP, dû au général Poncelet. On marque sur la circonférence O' des points A_1, A_2, A_3,... (*fig.* 147) équidistants, qui deviendront les centres instantanés à des époques équidistantes, et de ces

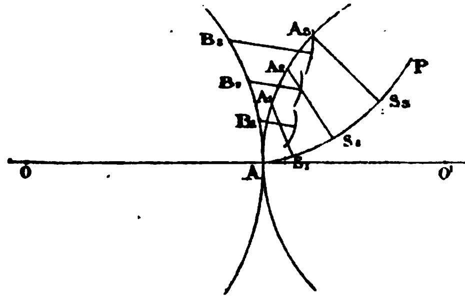


Fig. 147.

points on abaisse des normales $A_1 S_1$, A_2S_2, A_3S_3,..... sur la courbe AP. On marque aussi sur la circonférence O des points B_1, B_2, B_3,... séparés par des arcs égaux à AA_1, A_1A_2,.....; ces points sont les centres instantanés des époques successives considérées. Les cercles décrits de B_1, B_2, B_3,..... comme centres avec A_1S_1, A_2S_2, A_3S_3,..... pour rayons, sont tangents aux positions successives de AP et aussi à son enveloppe qui est le profil cherché; ce profil sera donc une courbe tangente à toutes les circonférences tracées, facile à construire.

On peut encore effectuer la construction de Savary (**52**) et déterminer le centre de courbure *d* (*fig.* 146) de l'enveloppe cherchée correspondant à une époque voisine de la première. Le cercle de rayon DS est osculateur au profil cherché : si l'on trace plusieurs de ces cercles correspondant à des

époques successives assez rapprochées, le profil conjugué de AP, osculateur à tous ces cercles, sera déterminé plus exactement que par la construction précédente.

Les dents doivent être limitées à une petite distance des cercles primitifs pour éviter le glissement qui ne manquerait pas de se produire si elles avaient une étendue assez considérable. Elles se composent toutes d'une partie intérieure au cercle primitif et d'une partie extérieure à ce cercle ; elles sont limitées d'une part par deux courbes symétriques par rapport au rayon vecteur OF aboutissant à l'extrémité de chacune d'elles (*fig.* 148); d'autre part, pour éviter les cassures, par un cercle concentrique au cercle primitif. La partie d'une dent intérieure au cercle primitif s'appelle la *base* de la dent, la partie extérieure la *tête*. L'espace BD du cercle primitif intercepté par une dent a reçu le nom de *plein*, l'espace BE celui de *vide* et l'intervalle DE est ce qu'on appelle une *division*.

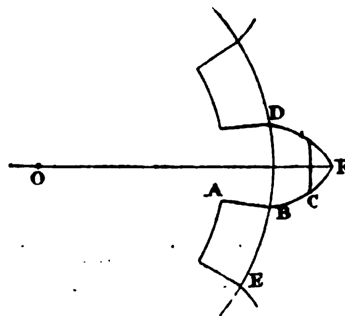


Fig. 148.

Si le mouvement des roues est un mouvement continu, il est nécessaire que la circonférence de chacune d'elles comprenne un nombre déterminé de dents, ce qui exige que l'arc DE soit une partie aliquote de la circonférence. L'uniformité du mouvement exige aussi qu'un couple de dents cessant d'être en prise, un autre couple de dents vienne en contact. Mais cette condition n'est pas suffisante pour la régularité du mouvement. On construit alors l'engrenage de façon qu'un couple de dents

étant en contact par son milieu A(*fig.* 149), le couple précédent cesse d'être en prise en même temps que le couple suivant commence à y être. Il est donc nécessaire que les divisions soient égales sur les deux cercles. En effet, lorsqu'une dent du cercle O sera venue prendre la place de la précédente, le cercle O' devra aussi avoir avancé d'une dent, et le point de

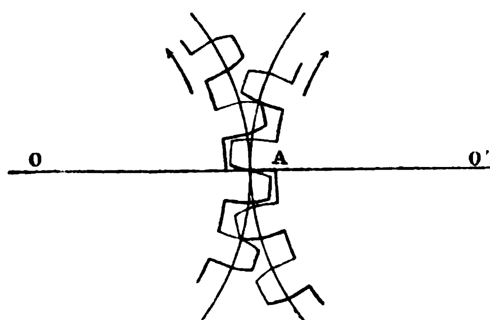


Fig. 149.

contact aura dû se déplacer de la même quantité sur les deux cercles.

Par suite, le nombre des dents tracé sur chaque roue est proportionnel au rayon de ces roues et comme ces rayons sont en raison inverse des vitesses angulaires, les nombres des dents sont aussi en raison inverse de ces vitesses.

Celle des deux roues qui transmet le mouvement à l'autre s'appelle la *roue menante* : l'autre a reçu le nom de *roue menée*. Tant que le contact de deux dents a lieu avant la ligne des centres la dent de la roue menante agit par son profil courbe et celle de la roue menée par une des arêtes vives qui la terminent. Le contraire a lieu au-delà de la ligne des centres. Si l'on considère le contact de deux dents comme

Par suite :

$$\text{arc } A_1m = \text{arc } AA_1$$

On peut donc considérer le point m comme un point invariablement lié à la circonférence décrite sur O'_1A_1 comme diamètre et supposer que cette circonférence roule sans glisser sur la circonférence O. Le lieu du point m est donc une épicycloïde. En supposant l'arc AA_1 égal à une division et en nous appuyant sur des considérations analogues aux précédentes, il est facile de voir que m est la limite qu'il convient d'adopter pour l'extrémité de la dent.

De cette façon, nous n'avons défini que la tête de la dent. On convient de prolonger les arcs d'épicycloïdes à l'intérieur du cercle O par des portions de droite dirigées suivant des rayons. Au point de vue d'un observateur lié invariablement au cercle O', O roulant sans glisser sur O', ces portions de droite enveloppent des épicycloïdes, d'après ce qui précède. Par suite, nous prolongerons extérieurement le profil des dents de la roue O' par ces arcs d'épicycloïdes.

On peut regarder le cas que nous venons de traiter comme un cas particulier du suivant. Imaginons à l'intérieur du cercle O' un troisième cercle qui lui soit tangent en A, et supposons qu'en même temps que O' roule sans glisser sur O, ce cercle O'' roule également sans glisser sur O' (*fig.* 152), de telle sorte que les trois cercles aient toujours un point commun. Ce mouvement revient évidemment au mouvement de roulement sans glissement de O'' sur O. Par suite, pour un observateur lié invariablement au cercle O, un point m quelconque du cercle O'' décrit une épicycloïde. Pour un observateur entraîné avec O', ce même point m décrit une hypocy-

cloïde. Mais, à un instant quelconque, ces deux courbes ont une normale commune Am. Elles sont par suite tangentes en ce point m. Chacune d'elles est l'enveloppe de l'autre pour un

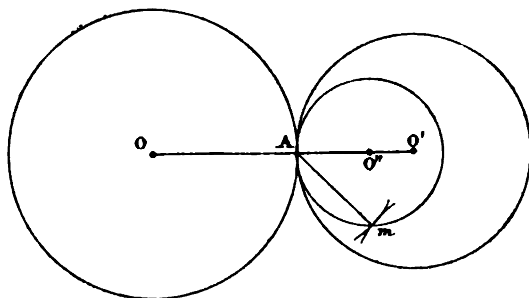


Fig. 152.

observateur entraîné soit avec le cercle O, soit avec le cercle O'. En supposant que O'' ait un rayon moitié de celui de O', le lieu du point m pour l'observateur entraîné avec le cercle O' est une droite, et l'on retombe sur le cas précédent.

Nous avons vu précédemment que, dans l'engrenage à flanc, le profil des dents de l'une des roues étant une droite, celui des dents de l'autre roue est une épicycloïde.

Généralement, la roue O a un rayon beaucoup plus grand que l'autre. L'épicycloïde qui convient au profil de ses dents peut être sensiblement confondue avec une cycloïde. Au point A, le rayon de courbure de cette cycloïde est nul,

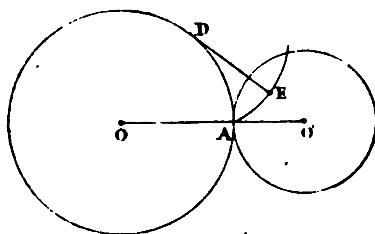


Fig. 153.

au point E il est à peu près double de DE (*fig.* 153). Or, DE est

sensiblement égal à DA. Si donc on prend l'arc DA égal à une division, et que de D comme centre, avec DA comme rayon, on décrive un arc de cercle AE, cet arc pourra être pris comme profil des dents de l'une des roues à la place de l'épicycloïde dont il diffère peu.

137. Engrenage à développante de cercle. — Figurons les deux cercles primitifs tangents extérieurement et imaginons par le point de contact A une droite DD′ quelconque (*fig.* 154). Dans la pratique, cette droite DD′ est inclinée le

Fig. 154.

plus possible sur la ligne des centres. Considérons les deux cercles OD, O′D′ concentriques aux cercles primitifs et tangents à la droite DD′. Supposons qu'on prenne pour profil des dents du cercle O′ la développante du cercle O′D′ qui passe par le point A.

Regardons cette courbe comme invariablement liée au cercle O′ et cherchons son enveloppe lorsque ce cercle roule sans glisser sur le cercle O. Le point de contact des deux cercles primitifs étant venu de A en A_1, la normale commune

(*fig.* 155) à la développante et à son enveloppe sera la droite A_1D_1' tangente au cercle $O_1'D_1'$. Mais cette droite A_1D_1' fait avec la ligne des centres OO_1' le même angle ε que DD′ avec OO′. Elle passe donc à une distance constante du centre O et a pour enveloppe un cercle de centre O et de rayon

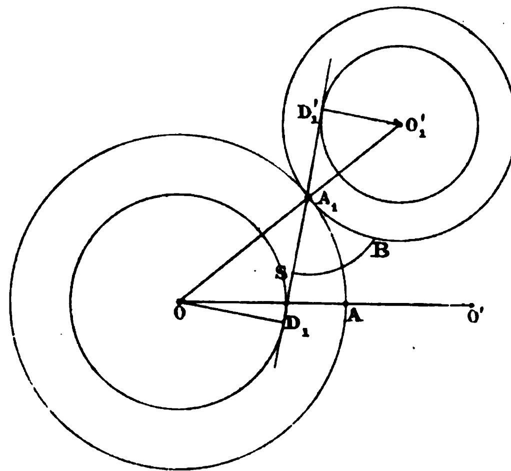


Fig. 155.

$OD_1 = OD$. La normale à l'enveloppe cherchée touche donc constamment un cercle fixe. Cette enveloppe est par suite une développante de cercle. En prenant, parmi toutes les développantes du cercle OD celle qui passe par le point A, on a le profil des dents du cercle O.

La courbe profil des dents du cercle O′ peut être prolongée de part et d'autre du cercle primitif sans changer de définition. Cette remarque faite, proposons-nous de limiter les dents. Nous nous appuierons toujours sur le même principe : le point de contact doit se transporter à l'extrémité de la dent en même temps que les deux cercles primitifs avancent d'une

division. Donc en prenant sur le cercle primitif une longueur AC égale à une division et menant du point C une tangente au cercle OD, cette tangente rencontre la développante en un point E qui sera l'extrémité de la dent. On limite de même les dents du cercle mobile.

Cet engrenage a plusieurs avantages. La courbe AE profil des dents de la roue O est définie indépendamment du cercle O'. On pourra donc faire engrener simultanément O avec plusieurs cercles de diamètre différent. Il n'en était pas de même dans l'engrenage à flanc.

Un deuxième avantage résulte de ce que le contact ne cesse pas d'avoir lieu si la distance des axes O et O' varie, soit par suite de l'usure, soit par suite d'un mauvais ajustage. En effet, R et R' variant, le rapport $\frac{R}{R'}$ égal au rapport du nombre des dents reste invariable. Il en est donc de même du rapport des rayons des cercles OD et O'D', et la définition des deux profils reste la même.

Un troisième avantage est le suivant. Par suite de l'usure des dents, les profils sont altérés et il est naturel de considérer les nouveaux profils comme des courbes parallèles. Alors une développante de cercle est remplacée par une développante du même cercle et l'engrenage reste exact. Malgré ces avantages, l'engrenage à développante est moins employé que l'engrenage à épicycloïde. Cela tient à ce que les dents s'amincissent davantage dans l'un que dans l'autre.

138. Engrenages intérieurs. — Figurons deux cercles tangents intérieurement. Soient O et O' leurs centres (*fig.* 156). Adoptons pour profil des dents du cercle O' une circonférence

ayant son centre C sur O′. On voit, par un raisonnement déjà employé (**136**), que si O′ roule sans glisser sur O, l'enveloppe du cercle C se compose de deux développantes d'hypocycloïde. L'une de ces courbes, qu'on doit adopter pour profil

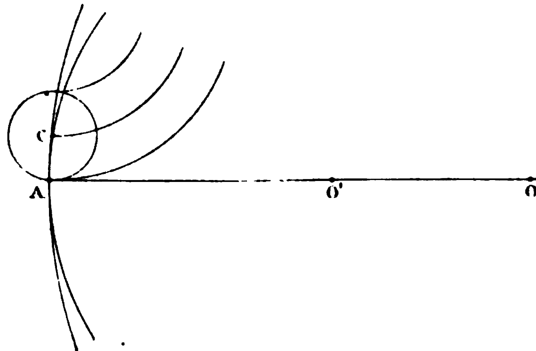


Fig. 156.

des dents du cercle O, détermine un engrenage dont les dents sont plus larges à leurs extrémités qu'à leurs bases. Aussi cette solution est-elle peu employée. Cependant il y a un cas particulier à signaler, celui où les rayons des deux cercles primitifs sont tels que

$$R' = \frac{R}{2}$$

Dans ce cas il résulte d'une remarque faite antérieurement (**63**) que le point C décrit un diamètre du second cercle. Le profil des dents de O est donc un profil rectiligne.

Quel que soit le rapport des rayons des cercles primitifs, on peut réaliser un engrenage intérieur en adoptant, pour les dents de l'un des cercles, un profil rectiligne, dirigé suivant un rayon.

Mais il y a lieu de distinguer dans ce cas quelle est la roue menante. Supposons que l'engrenage soit mené par la grande roue ; on donnera alors aux dents de la roue menée un profil rectiligne. Soit C le point de contact d'un des profils avec son enveloppe. Le centre de courbure K (*fig.* 157) de cette enveloppe se détermine par la construction de Savary. On voit ainsi que le profil épicycloïdal de la grande roue doit appuyer sur le rayon AB du côté de I, ce qui montre que le contact a lieu seulement après la ligne des centres. Si l'on voulait renverser la marche de l'engrenage, le contact ne se produirait plus qu'avant le passage des dents par la ligne des centres, circonstance nuisible au bon fonctionnement de l'appareil.

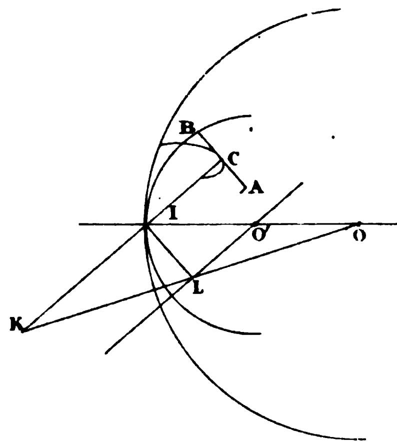


Fig. 157.

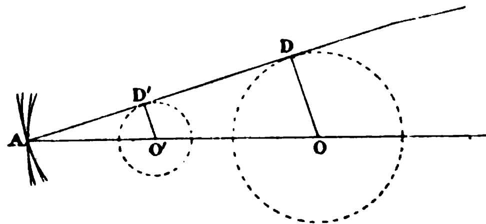


Fig. 158.

Pour construire l'engrenage intérieur à développante de cercle, on mène par le point A (*fig.* 158) une droite arbitraire très inclinée sur OO′ et l'on abaisse sur cette droite les perpendiculaires OD, O′D′; on décrit les cercles de rayons OD, O′D′; les profils cherchés sont les développantes de ces cercles passant par A. Dans cet engrenage, les dents de l'une des roues doivent s'élargir à leur extrémité. Aussi, quoiqu'il soit réciproque, il est rarement employé.

139. Transformations successives au moyen de pignons. — Nous avons vu (**135**) que les nombres de dents des deux roues d'un engrenage étaient dans un rapport inverse de celui des vitesses angulaires. Si les termes de ce rapport sont des nombres compliqués, on se sert de plusieurs transformations successives pour éviter la construction toujours difficile de roues armées d'un grand nombre de dents. Toutefois, tout en cherchant à diminuer le plus possible le nombre des dents, on ne doit pas dépasser le minimum de six dents, sans quoi les deux roues ne pourraient plus être constamment en prise.

Soit $\frac{a}{b}$ le rapport des vitesses angulaires que nous supposons être un nombre compliqué. On se propose de le remplacer par un rapport plus simple $\frac{x}{y}$, qui en diffère peu. La fraction $\frac{a}{b}$ étant réduite en fraction périodique, soit $\frac{p}{q}$ son avant-dernière réduite ; on a :

$$aq - bp = 1$$

Posons :

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{k}{by}$$

Cette différence étant très petite, k sera un nombre petit relativement à by, défini par l'équation :

$$ay - bx = k$$

Les solutions entières en x et y de cette équation sont :

$$y = kq + \text{M}b$$
$$x = kp + \text{M}a$$

M désignant un nombre entier quelconque. k étant fixé, on en déduira par suite les valeurs de x et y en choisissant pour ces valeurs des nombres se décomposant en facteurs premiers simples. Soient m, m_1, m_2, n, n_1, n_2 ces facteurs. Le rapport $\frac{a}{b}$ sera remplacé par le rapport :

$$\frac{m\ m_1 m_2}{n\ n_1 n_2}$$

On forme alors un premier engrenage composé de deux roues N, M (*fig.* 159) dont les nombres de dents sont dans un rapport inverse de $\frac{m}{n}$. Sur l'axe de M est montée une seconde roue ou pignon qui engrène avec une roue M_1 ; les nombres de dents de ces nouvelles roues sont dans un rapport inverse de $\frac{m_1}{n_1}$. Enfin, une roue N_2, montée sur l'axe de M_1, engrène avec M_2, le nombre de dents étant dans le rapport inverse de $\frac{m_2}{n_2}$. La vitesse angulaire de N et celle de M_2 seront par suite dans le rapport :

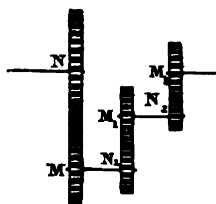


Fig. 159.

$$\frac{m\ m_1 m_2}{n\ n_1 n_2}$$

différant peu de $\frac{a}{b}$ et la transformation cherchée est réalisée.

Ce système de pignons est employé, par exemple, dans les rouages compliqués des horloges donnant à la fois le temps sidéral et le temps moyen, ou indiquant les phases de la lune.

140. Trains épicycloïdaux. — On arrive aussi à réaliser des transformations compliquées à l'aide des trains épicycloïdaux.

Soit N (*fig.* 160) une roue liée à un axe (les liaisons fixes sont indiquées sur la figure) et animée d'une certaine vitesse angulaire ω. Cette roue entraîne dans son mouvement un deuxième axe I, pouvant tourner sur lui-même, auquel sont fixées deux roues S et R; celles-ci engrènent avec deux autres roues P et Q centrées sur le premier axe, et pouvant tourner librement, dont nous désignerons par ω_1, ω_2 les vitesses angulaires. Pour un observateur entraîné avec la roue N, les roues P et Q ont des vitesses angulaires apparentes $\omega_1 - \omega$ et $\omega_2 - \omega$, R et S une vitesse angulaire relative α. En appelant p, q, r, s les nombres de dents des roues P, Q, R, S, on a alors, puisque ces roues engrènent deux à deux et semblent tourner autour d'axes fixes :

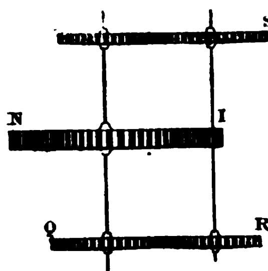


Fig. 160.

$$(\omega_2 - \omega)\, q = \alpha r$$

$$(\omega_1 - \omega)\, p = \alpha s$$

d'où :

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} = \frac{qs}{pr}$$

Les vitesses ω, ω_1 étant données à l'avance, on dispose de la vitesse ω_2 ; le plus souvent, on rend cette vitesse nulle et l'on fixe la roue Q ; on a alors :

$$\frac{qs}{pr} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega}$$

Les nombres de dents p, q, r, s sont assujettis à vérifier cette unique égalité ; on pourra, en général, y satisfaire avec des nombres simples, d'autant plus que, dans bien des cas, le nombre $1 - \frac{\omega_1}{\omega}$ sera moins compliqué que $\frac{\omega_1}{\omega}$.

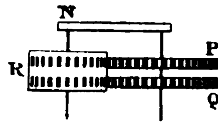


Fig. 161.

Dans la pratique, on remplace quelquefois la roue N par un simple levier (*fig.* 161) et les deux roues R et S par un pignon R, engrenant avec les deux roues P et Q qui sont égales. On a alors

$$r = s$$

et l'égalité précédente devient :

$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1 - \frac{q}{p}$$

Le nombre des dents du pignon est donc indifférent ; il n'influe pas sur les vitesses ω, ω_1.

En prenant $p = q + 1$, on pourra réaliser des rapports très petits entre les vitesses angulaires, puisque la formule montre que, pour $q = p$, le rapport $\frac{\omega_1}{\omega}$ serait nul.

Si l'on fait par exemple :

$$q = 99 \qquad p = 100$$

on réalise entre les vitesses ω_1 et ω le rapport $\frac{1}{100}$. Avec un simple engrenage composé de deux roues, les nombres minimums de dents auraient été 6 et 600 et un tel engrenage est irréalisable en pratique.

141. Engrenages coniques. — Pour déterminer un engrenage conique servant à transformer un mouvement circulaire d'axe SA (*fig.* 162) en un mouvement d'axe SB, on imagine deux cônes de sommet S, d'axes SA, SB, tangents suivant une génératrice SC et dont les angles aux sommets α, β satisfont à la relation :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\omega'}{\omega}$$

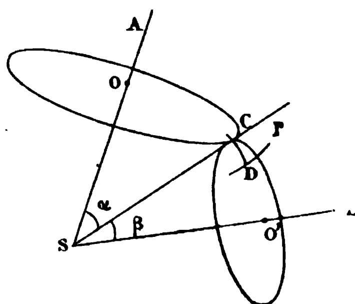


Fig. 162.

ω et ω' désignant les vitesses angulaires des deux mouvements. On suppose que ces cônes roulent sans glisser l'un sur l'autre; le profil des dents qu'il faudra creuser sur ces cônes s'obtient en s'appuyant sur les mêmes principes que dans les engrenages cylindriques. On considère une surface conique Q fixée au cône d'axe SB; la surface conjuguée P sera l'enveloppe des positions successives de la surface Q; car, pour un observateur entraîné dans le mouvement du cône SA, les deux profils ne doivent pas cesser d'être en contact. A un ins-

tant quelconque, la surface conique Q touche son enveloppe suivant une génératrice ; pour avoir cette génératrice, on fait passer par SC un plan normal à la position particulière considérée de la surface Q. Pour simplifier, on imagine une sphère de centre S sur laquelle les deux cônes déterminent deux cercles de pôles O, O′ qui roulent sans glisser l'un sur l'autre. La surface Q a pour trace une courbe sphérique Γ ; par le point de contact C, on lui mène un grand cercle normal et l'on obtient le point D qui appartient à la surface enveloppe ; en joignant SD on a la génératrice commune à l'instant considéré.

Supposons que la surface Q soit un plan passant par SB (*fig.* 163) et limitons les deux cônes par des plans perpendiculaires à leurs axes et menés par un point de la génératrice commune. Soit O′L la trace du plan considéré sur le plan du cercle O′. La génératrice de contact s'obtient en menant par l'axe instantané de rotation SC un plan perpendiculaire à SO′L ; soit CK, perpendiculaire à O′L, la trace de ce plan sur le plan du cercle O′; SK est la génératrice de contact. Dans le plan O′, le point K est sur une circonférence tracée sur O′C comme diamètre, et l'arc CK de cette circonférence est égal à l'arc CL de la circonférence de rayon double. Comme il n'y a pas de glissement, cet arc CK est égal à l'arc CK_0 compté

Fig. 163.

sur la circonférence O à partir de la position initiale K_0. Le cercle O′KC et le cercle de base O, sur lequel il roule, sont d'ailleurs sur une même sphère; menons, en effet, par le milieu I de O′C une parallèle à O′S; le point fixe G où elle coupe l'axe SA est le centre de la sphère à laquelle appartiennent les cercles O′KC et O. Le point K décrit une épicycloïde sphérique, tracée sur cette sphère; cette épicycloïde est la directrice d'un cône de sommet S qui est le profil conjugué cherché.

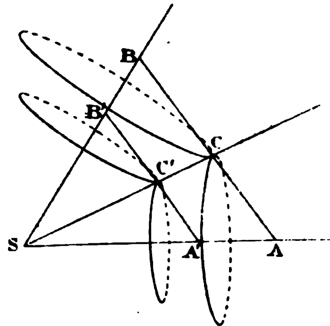
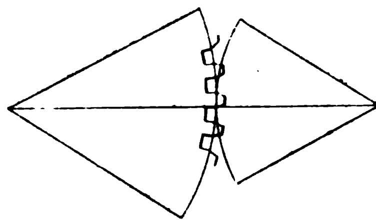


Fig. 164.

En pratique, on le tracera par une construction plane qui donne une approximation suffisante.

Pour limiter l'engrenage, on trace une droite BCA (*fig.* 164) rencontrant les deux axes. Les deux portions CA, CB de cette droite, en tournant autour de SA, SB, engendrent deux cônes tangents suivant BCA : ces deux cônes limiteront l'engrenage à sa partie supérieure.

A sa partie inférieure, il sera de même limité par deux cônes, parallèles aux premiers, engendrés par B′C′A′ parallèle à BCA. Si on développe les deux cônes engendrés par CA et CB sur leur plan tangent commun, on obtient une figure plane (*fig.* 165) qui, ap-


Fig. 165.

pliquée sur les deux cônes, donne le profil supérieur de l'engrenage : en joignant tous les points de ce profil à S, on a la surface conique qui, arrêtée à la limite inférieure, donne l'engrenage complet. On effectuera la construction du profil sur la figure plane développée par l'un ou l'autre des procédés indiqués pour les engrenages plans ; mais il faut bien remarquer que le profil doit se fermer et que, par suite, les divisions sur les deux secteurs circulaires doivent être des parties aliquotes de l'arc qui les limite, et non de la circonférence entière.

JOINT DE CARDAN. — PARALLÉLOGRAMME DE WATT. — VIS D'ARCHIMÈDE

142. Joint de Cardan. — Nous avons déjà décrit cet appareil (**131**) qui sert à transmettre le mouvement de rotation d'un axe A à un deuxième axe B rencontrant le premier. Nous allons évaluer le rapport des vitesses angulaires des deux mouvements de rotation autour de A et de B. Considérons une sphère ayant pour centre C le centre du croisillon (*fig.* 166) ; soit A la trace sur cette sphère du premier axe que nous supposons vertical ; soit DE la branche corres-

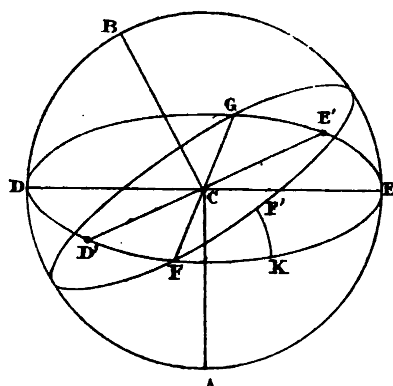


Fig. 166.

pondante du croisillon que nous plaçons dans le plan de la figure ; ses extrémités décriront le grand cercle dont le pôle est A ; soit B la trace du deuxième axe que nous supposons, au début, dans le plan de la fourchette inférieure, c'est-à-dire dans le plan de la figure. La branche correspondante FG du croisillon est perpendiculaire à la fois à BC et à DE, donc au plan de la figure.

Les axes AC et BC conservant la même position, amenons DE en D'E' par une rotation autour de AC ; il en résulte un déplacement de FG dans un plan perpendiculaire à BC ; le point F vient en F', en restant toujours à 90° du point D. Posons :

$$DD' = x \qquad FF' = y$$

et traçons le grand cercle F'K perpendiculaire à DFE ; son pôle est D', puisque D'F' = 90°. On a donc :

$$D'K = 90° = DF$$

d'où :

$$FK = DD' = x$$

Si l'on appelle α l'angle F'FK égal à l'angle aigu des deux axes, on a, dans le triangle F'FK :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \cos \alpha$$

d'où, en différentiant :

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{dy \cos \alpha}{\cos^2 y}$$

ou, en désignant par u et v les vitesses angulaires de rotation

autour des axes A et B :

$$\frac{u}{\cos^2 x} = \frac{v \cos \alpha}{\cos^2 y}$$

d'où :

$$\frac{u}{v} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 y\,(1 + tg^2 x)} = \frac{\cos \alpha}{\cos^2 y\,(1 + tg^2 y \cos^2 \alpha)}$$

ou :

$$\frac{u}{v} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 y \sin^2 \alpha}$$

Telle est la valeur du rapport des deux vitesses angulaires ; il reste compris entre les deux limites $\cos \alpha$ et $\frac{1}{\cos \alpha}$, correspondant aux valeurs 0 et 1 de $\sin y$.

L'angle des axes, quelconque en théorie, ne reçoit, en pratique, que des valeurs comprises entre 135° et 180°.

143. Parallélogramme de Watt. — Soit OA (*fig.* 167) un balancier auquel est articulé le parallélogramme ABCD

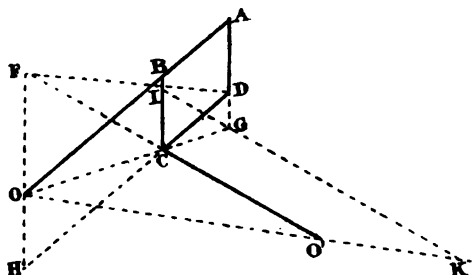


Fig. 167.

dont le sommet C est lié au point fixe O' (**133**).

Les vitesses V_a, V_b, V_c, V_d des points A, B, C, D sont, dans cet appareil, proportionnelles à certaines longueurs qu'il est

facile de construire. Considérons la droite CD et le point H où la droite CD rencontre une parallèle OH à BC. Le point H est fixe sur CD puisque

$$CH = OB = C^{te}$$

D'autre part, on a aussi :

$$OH = AD = C^{te}$$

Le point H décrit donc un cercle de centre O et le mouvement de CD est celui d'une droite dont deux points C et H décrivent des cercles fixes ; dans ce mouvement, le centre instantané est le point F d'intersection de OH et CO', et l'on a :

$$(1) \qquad \frac{V_c}{CF} = \frac{V_d}{DF}$$

La droite FD est, par suite, la normale à la courbe à longue inflexion que décrit le point D.

Considérons encore la droite AD et le point G où elle est rencontrée par OC prolongé. On a :

$$\frac{GD}{GA} = \frac{GC}{GO} = \frac{AB}{AO} = C^{te}$$

Le point G est donc fixe sur AD. Joignons OO' et menons GK parallèle à CO' ; nous aurons :

$$\frac{KO'}{KO} = \frac{GC}{GO} = \frac{AB}{AO} = C^{te}$$

Le point K est donc fixe. On a de plus :

$$\frac{GK}{CO'} = \frac{GO}{CO} = \frac{AO}{BO}$$

d'où :

$$GK = CO' \cdot \frac{AO}{BO} = C^{te}$$

Le point G décrit donc un cercle de centre K et le mouvement de AD est celui d'une droite dont deux points A et G décrivent des cercles fixes ; dans ce mouvement, le centre instantané est le point I d'intersection de OA et GK : la droite ID, normale à la courbe à longue inflexion, se confond avec FD et l'on a :

$$\frac{V_d}{DI} = \frac{V_a}{AI}$$

D'ailleurs, on a aussi :

$$\frac{DI}{AI} = \frac{DF}{AO}$$

donc :

$$\frac{V_d}{DF} = \frac{V_a}{AO} \tag{2}$$

On a encore évidemment :

$$\frac{V_a}{AO} = \frac{V_b}{BO} \tag{3}$$

et l'on déduit de (1), (2) et (3) :

$$\frac{V_a}{AO} = \frac{V_b}{BO} = \frac{V_c}{CF} = \frac{V_d}{DF}$$

On connait donc quatre longueurs proportionnelles aux vitesses des points A, B, C, D.

La remarque que nous venons de faire montre qu'on peut remplacer le parallélogramme de Watt par un mécanisme

plus simple formé seulement des trois droites OH, HC et CO′ (*fig.* 168). En effet, il suffit d'assujettir les points H et C à décrire des cercles de centre O et O′ pour que la trajectoire

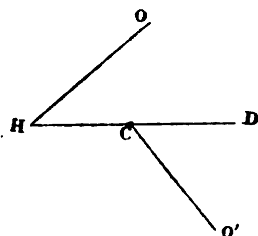


Fig. 168.

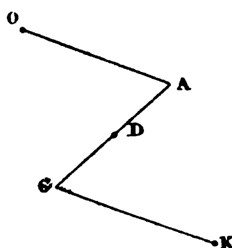


Fig. 169.

du point D reste la même. On peut encore, en choisissant convenablement un point G sur la direction AD (*fig.* 169), remplacer le parallélogramme par le système de tiges OA, AG, GK, articulées de telle sorte que les trajectoires des points A et G soient des cercles de centre O et K.

Revenons au parallélogramme de Watt. Il existe sur la direction BC un point L (*fig.* 170) dont la trajectoire est une courbe homothétique de celle décrite par le point D. En effet, joignons les deux points O et D et considérons les deux triangles OBL, OAD ; ils donnent :

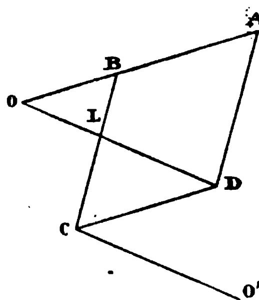


Fig. 170.

$$\frac{BL}{OB} = \frac{AD}{OA}$$

Mais le rapport $\frac{AD}{OA}$ est fixe ainsi que la longueur OB : donc L est un point fixe sur le côté BC. Par suite, l'égalité

$$\frac{BL}{AD} = \frac{OL}{OD}$$

montre que la trajectoire du point L est une courbe homothétique de la courbe lieu du point D, le centre d'homothétie étant le point O. On pourra, par conséquent, articuler en L la tige d'un piston destiné à alimenter la chaudière. Cette

Fig. 171.

propriété du parallélogramme ne se présente pas dans les modifications que nous avons signalées.

Dans la pratique, pour réaliser le parallélogramme de Watt, on opère de la façon suivante : connaissant la direction moyenne OA du balancier (*fig.* 171), l'amplitude totale aa' de la course du balancier, dont le sinus est pris égal à $\frac{1}{3}$, et la

mesure des côtés du parallélogramme qu'on choisit tels que :

$$AB < \frac{OA}{2}$$

$$AD > \frac{OA}{3}$$

on cherche à faire décrire approximativement au point D la perpendiculaire à OA élevée sur le milieu de AF. A cet effet, on construit les positions c, C, c' occupées par l'un des sommets du parallélogramme lorsque le balancier occupe les positions Oa, OA, Oa'. Le centre du cercle passant par les trois points c, C, c' est le point O′ auquel on doit relier le point C par une tige articulée à ses extrémités.

144. Inverseur de Peaucellier. — Le parallélogramme de Watt ne donne qu'une solution approchée de la transfor-

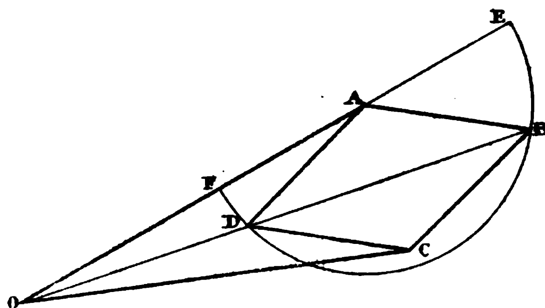


Fig. 172.

mation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne alternatif. L'inverseur de Peaucellier réalise complètement cette transformation. Il se compose d'un losange ABCD, formé de tiges articulées, dont deux sommets A et C sont reliés par deux tiges égales à un point fixe O (*fig.* 172).

Supposons connue la trajectoire du point D et proposons-nous de déterminer celle du point B. A cet effet, désignons par l la longueur des quatre côtés du losange, par L la longueur des deux tiges OA, OC et décrivons du point A comme centre un cercle de rayon l. Il passera par les points B et D et rencontrera la droite OA en deux points E et F tels qu'on ait :

$$OD.OB = OE.OF$$

Mais :

$$OF = L - l$$
$$OE = L + l$$

Donc :

$$OB.OD = L^2 - l^2$$

La trajectoire du point B est donc la transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe lieu du point D. Si cette dernière est un cercle passant par le point O, la trajectoire de B est une droite. En effet, prenons pour pôle le point O et pour axe polaire la droite joignant ce point O au centre du cercle décrit par le point D.

L'équation de ce cercle sera, en désignant par a son diamètre :

$$\rho = a \cos \omega$$

Par suite, d'après l'égalité précédente, la trajectoire du point B a pour équation :

$$\rho a \cos \omega = L^2 - l^2$$

ou :

$$\rho = \frac{L^2 - l^2}{a \cos \omega}$$

équation qui représente une droite perpendiculaire à la ligne qui joint le point O au centre du cercle décrit par le point D.

145. Vis d'Archimède. — La vis d'Archimède est destinée à l'élévation de l'eau. Elle est constituée par un cylindre de révolution dont l'axe est peu incliné sur l'horizon; elle repose sur le principe suivant. Si on imagine une hélice tracée sur un cylindre de révolution, il existe sur chaque spire deux points M et N (*fig.* 173) où les tangentes à l'hélice sont horizontales. En effet, les tangentes à l'hélice sont parallèles aux génératrices d'un cône de révolution dont l'angle au sommet est égal à l'angle constant des tangentes à l'hélice avec l'axe. Si par le sommet du cône on fait passer un plan horizontal, il coupera le cône suivant deux génératrices auxquelles correspondront, sur chaque spire de l'hélice, deux tangentes horizontales, dont les points de contact seront M et N par exemple. L'hélice étant remplacée par un tube, tout point pesant placé en M à l'intérieur du tube y sera en équilibre instable; en N, au contraire, il est en équilibre stable.

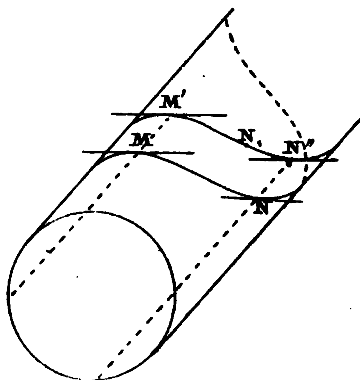


Fig. 173.

Ceci posé, supposons qu'on fasse tourner le cylindre autour de son axe; le point N vient en N_1 et cesse d'être le point le plus bas de l'hélice; mais, en vertu de la pesanteur, le point matériel qui coïncidait avec lui sera ramené de N_1 en N'. Le mouvement de ce point matériel est donc le même que s'il s'était déplacé sur la génératrice NN' d'une quantité égale à NN'. Si à la place du point matériel on a mis une certaine

quantité d'eau à l'intérieur du tube, elle finira par se déverser à la partie supérieure par suite de la rotation du cylindre. La quantité d'eau contenue dans chaque spire est limitée aux deux points M et P situés dans un même plan horizontal passant par M, comme l'indique le principe des vases communiquants. La portion MNP du tube est appelée l'arc hydrophore.

Il faut, pour construire un arc hydrophore, connaître

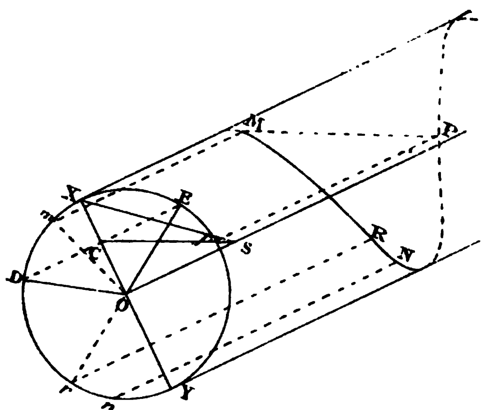


Fig. 174.

sur chaque spire d'hélice les points M et N où la tangente est horizontale. Pour les déterminer par une construction géométrique, nous supposerons connus les angles α et β que font d'une part le plan horizontal avec l'axe du cylindre, d'autre part les tangentes à l'hélice avec ce même axe. Faisons une projection du cylindre sur un plan vertical parallèle à l'axe et rabattons la base du cylindre autour du diamètre XY (*fig.* 174). Menons par le point X une droite SX faisant avec l'axe du cylindre le même angle β que celui des tangentes à l'hélice avec cet axe. Par le point S où cette droite rencontre l'axe,

menons une horizontale SC. Les deux génératrices du cône aboutissant aux points de la base représentés en rabattement par D et E sont horizontales. Mais les tangentes à l'hélice parallèles aux génératrices du cône se projettent suivant des tangentes au cercle de base ; donc les points m et n du cercle de base dont les tangentes sont respectivement parallèles aux droites OE et OD ne sont autres que les projections des points M et N. On obtiendra par suite les points cherchés en menant par les points m et n des parallèles aux génératrices du cylindre et prenant les points de rencontre de ces génératrices avec l'hélice.

Proposons-nous, les points M et N étant connus, de déterminer la longueur de l'arc hydrophore. Nous désignerons par θ_0 l'angle XOm, par θ_1 l'angle XOp et par a le rayon du cylindre. La considération des triangles OSX et OSC donne :

$$OS = a \operatorname{cotg} \beta$$
$$OC = OS \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} \alpha$$

Par suite :

$$\cos XOE = \frac{OC}{a} = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} \alpha$$
$$\sin \theta_0 = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} \alpha$$

Cette formule montre que le point M, où la tangente à l'hélice est horizontale, n'existera que si

$$\operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} \alpha < 1$$

c'est-à-dire que l'axe du cylindre doit être moins incliné sur l'horizon que les tangentes à l'hélice ne le sont sur l'axe.

Pour évaluer l'angle θ_1, prenons un point R quelconque sur l'hélice. Soient x son ordonnée comptée à partir d'un plan horizontal passant par O, r le point correspondant sur le cercle O, θ l'angle X Or. Projetons le contour XrR sur la verticale, on a :

$$x = a \cos\theta \cos\alpha + (l + a\theta \operatorname{cotg}\beta) \sin\alpha$$

De cette formule nous déduirons la valeur de θ qui répond au point P en écrivant que l'ordonnée de ce point est égale à celle du point M ; par suite :

$$a \cos\theta_0 \cos\alpha + (l + a\theta_0 \operatorname{cotg}\beta) \sin\alpha = a \cos\theta_1 \cos\alpha + (l + a\theta_1 \operatorname{cotg}\beta) \sin\alpha$$

Ou bien encore :

$$\cos\theta_0 - \cos\theta_1 = (\theta_1 - \theta_0) \operatorname{cotg}\beta \operatorname{tg}\alpha$$

Mais :

$$\sin\theta_0 = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{tg}\alpha$$

Donc :

$$\cos\theta_0 - \cos\theta_1 = (\theta_1 - \theta_0) \sin\theta_0$$

L'équation qui fournit θ_1 connaissant θ_0 est donc une équation transcendante. En la discutant, il est facile de voir qu'elle n'a entre O et 2π que deux racines, l'une $\theta_1 = \theta_0$, l'autre comprise entre $\pi - \theta_0$ et 2π.

θ_1 et θ_0 étant déterminés, la longueur l de l'arc hydrophore est donnée par l'égalité :

$$l = \frac{a(\theta_1 - \theta_0)}{\sin\beta}$$

Mais il est essentiel, pour que l'arc hydrophore conserve

cette longueur, que ses deux extrémités soient soumises à la pression atmosphérique, et par suite que l'air ait accès dans l'étendue entière du tube. On obtiendra ce résultat en juxtaposant un nombre suffisant de tubes en hélice, appliqués sur la surface extérieure du cylindre, et en supprimant les cloisons qui les séparent.

HYDROSTATIQUE

146. La mécanique des fluides se divise en deux parties: 1° L'hydrostatique qui traite de l'équilibre ; 2° L'hydrodynamique qui traite du mouvement.

Dans l'étude de l'hydrostatique on substitue aux fluides réels des conceptions mathématiques que l'on désigne sous le nom de fluides parfaits et qui jouissent des propriétés suivantes :

1° Les molécules n'ont les unes sur les autres aucune action de viscosité et cèdent au moindre effort qui tend à les séparer;

2° La distribution des molécules autour d'un point est symétrique par rapport aux diverses directions : il en résulte que la densité du fluide en un point est toujours la même quelle que soit la forme de l'élément de volume infiniment petit qui sert à la définir.

Ces propriétés ne se présentent pas en général pour les solides. Si, par exemple, on considère la densité en un point comme la limite du rapport de la masse comprise à l'intérieur d'un cylindre infiniment petit tracé autour du point à son volume, ce rapport tend en général vers une limite variable avec la direction des arêtes du cylindre. Il suffit pour s'en rendre compte de considérer une tige métallique comprimée dans le sens de la longueur. Sous un même volume la masse comprise à l'intérieur de deux cylindres est différente suivant que les génératrices des cylindres sont

dirigées dans le sens de la longueur ou de la largeur de la tige. Cette dissymétrie ne se présentera jamais dans les fluides parfaits.

On considère chaque molécule d'un fluide comme soumise à deux sortes de forces: les pressions, qui résultent de l'action des molécules très voisines, et les forces extérieures ou actions à distance finie. Ces dernières sont considérées comme étant les mêmes pour toutes les molécules comprises dans un élément de volume infiniment petit. Si l'on appelle dv un pareil élément de volume, comprenant un point de coordonnées x, y, z et ρ la densité en ce point, la masse de l'élément sera ρdv. Les composantes suivant les axes de la force extérieure qui agit sur l'élément pourront être représentées par

$$\rho X dv, \qquad \rho Y dv, \qquad \rho Z dv$$

X, Y, Z seront par définition les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de masse. Ce seront des fonctions des coordonnées x, y, z.

147. Pression en un point. — Ces préliminaires posés, imaginons un fluide parfait renfermé à l'intérieur d'un vase et en équilibre. Les molécules du fluide, voisines d'un élément A de la paroi, exercent sur cet élément certaines actions qui admettent une résultante si l'élément A est supposé infiniment petit.

Par suite de la symétrie qui existe dans la distribution des molécules du fluide autour du point A, on doit admettre que la résultante de ces actions est normale à l'élément A et proportionnelle à sa surface ω. Si on représente cette résultante

par $p\omega$, p sera la pression au point A, rapportée à l'unité de surface.

On définit de même la pression à l'intérieur d'un fluide en un point. A cet effet imaginons une surface quelconque BC passant par le point fixe et solidifions par la pensée la portion ADE du fluide (*fig.* 175). Nous ne détruirons pas l'équilibre et la résultante des actions exercées par les molécules situées d'un même côté de BC, au voisinage de cet élément, sera d'après ce qui précède normale à l'élément BC et proportionnelle à la surface de cet élément.

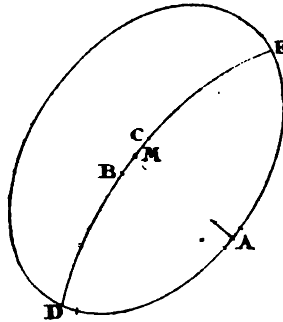


Fig. 175.

148. Théorème. — La pression qui s'exerce à l'intérieur d'un liquide en un point M de ce liquide ne dépend pas de l'orientation de l'élément de surface infiniment petit que l'on fait passer par ce point.

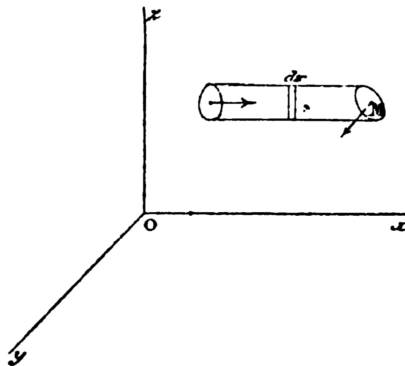


Fig. 176.

En effet, imaginons trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, un élément de surface ω tracé autour du point M et un cylindre dont les arêtes sont parallèles à Ox, ayant pour base l'élément considéré et limité à une section

droite ω' du cylindre (*fig.* 176). L'équilibre ne sera pas détruit si l'on solidifie par la pensée ce petit cylindre. Donc ce cylindre est en équilibre sous l'action des forces extérieures et des pressions exercées par les molécules voisines du fluide, tant sur les deux bases que sur la surface latérale du cylindre. Les pressions sur la surface latérale, étant normales à cette surface, ont des projections nulles sur Ox. Donc les composantes suivant Ox des pressions sur les deux bases et des forces extérieures doivent faire une somme nulle. Appelons p, p' les pressions rapportées à l'unité de surface sur les deux bases, α l'angle de la base ω avec la section droite, ρ la densité du liquide au point de coordonnées x, y, z ; X, Y, Z les composantes au même point de la force extérieure rapportée à l'unité de masse. Nous évaluerons la somme des composantes des forces extérieures suivant Ox en décomposant le cylindre en éléments de volume, tels que $\omega' dx$, limités par deux sections infiniment voisines. On trouve ainsi l'équation d'équilibre :

$$p'\omega' - p\omega \cos\alpha + \omega' \int_{x'}^{x} \rho X dx = 0$$

Or :

$$\omega' = \omega \cos\alpha$$

Donc l'équation précédente peut s'écrire :

$$p - p' = \int_{x'}^{x} \rho X dx$$

On voit que p a une valeur indépendante de α, ce qui démontre la proposition énoncée.

149. Remarques. — 1° Appliquons l'équation précédente à un déplacement infiniment petit, parallèle à Ox, de l'élément considéré, il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X$$

Par analogie pour des déplacements dy, dz, on aurait :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

Par suite la variation de pression résultant d'un déplacement quelconque dx, dy, dz de l'élément considéré est donnée par la formule :

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz) \tag{1}$$

Si un fluide est en équilibre, cette relation est vérifiée en chacun de ses points, et réciproquement.

Il suit de là que les composantes X, Y, Z ne sont pas des fonctions de x, y, z indépendantes. En effet, le premier membre de l'égalité précédente étant une différentielle exacte, il en est de même du second, donc :

$$\frac{\partial \rho Y}{\partial z} = \frac{\partial \rho Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \rho Z}{\partial x} = \frac{\partial \rho X}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho X}{\partial y} = \frac{\partial \rho Y}{\partial x}$$

Ou bien encore, en effectuant les différentiations indiquées :

$$\rho\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=Z\frac{\partial \rho}{\partial y}-Y\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)=X\frac{\partial \rho}{\partial z}-Z\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\rho\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=Y\frac{\partial \rho}{\partial x}-X\frac{\partial \rho}{\partial y}$$

En ajoutant ces trois équations membre à membre après les avoir multipliées respectivement par X, Y, Z, il vient :

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2° Revenons à l'équation (1) et supposons-la vérifiée pour

$$p=f(x.y.z)$$

Elle le sera encore si on remplace p par $f(x, y, z)+C^{te}$. De là résulte que si un liquide est en équilibre sous l'action de certaines charges, il le sera encore si on augmente les charges dans un rapport tel que la pression par unité de surface augmente d'une quantité constante. Ce principe est connu sous le nom de principe de Pascal et trouve une application importante dans l'appareil connu sous le nom de presse hydraulique.

3° Supposons qu'il y ait une fonction des forces, c'est-à-dire que

$$Xdx+Ydy+Zdz=d\varphi\,(x.y.z)$$

L'équation (1) devient :

$$dp=\rho d\varphi$$

Les surfaces telles que tout le long de chacune d'elles p reste constant sont des surfaces de niveau.

Deux surfaces de niveau ne peuvent pas se couper à l'intérieur du fluide, car, en leurs points de rencontre, la pression p aurait deux valeurs différentes; ce qui est impossible.

Sur une surface de niveau, les fonctions φ et p sont constantes : φ est par suite fonction de p et l'on a :

$$\varphi = \mathrm{F}(p)$$

En remplaçant dans l'équation fondamentale, on a :

$$dp = \rho \mathrm{F}'(p)\, dp$$

d'où :

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{F}'(p)}$$

ρ est donc aussi fonction de p. Les surfaces de niveau sont donc des surfaces d'égale pression et d'égale densité, quand il existe une fonction des forces.

D'une façon générale, on a, en tout point d'une surface de niveau :

$$dp = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = 0$$

ou :

$$\frac{\mathrm{X}}{p}\frac{dx}{ds} + \frac{\mathrm{Y}}{p}\frac{dy}{ds} + \frac{\mathrm{Z}}{p}\frac{dz}{ds} = 0$$

La résultante P des forces extérieures en un point est donc dirigée suivant la normale à la surface de niveau qui passe par ce point. Si nous considérons un petit déplacement linéaire dn sur la normale à la surface de niveau, l'équation fondamentale s'écrira, en prenant pour axe des x cette nor-

male :

$$dp = \rho P dn$$

d'où :

$$P = \frac{dp}{\rho dn}$$

On voit donc que si l'on considère des surfaces de niveau telles que la variation dp soit constante entre deux surfaces consécutives, la résultante P sera d'autant plus grande que dn sera plus petit, c'est-à-dire que les surfaces seront plus rapprochées.

150. Distinction des fluides en liquides et gaz. — Les équations que nous venons d'établir s'appliquent à tous les fluides, liquides ou gaz.

Nous considérons les liquides comme ayant une densité ρ constante ; il existe toujours alors une fonction des forces.

Pour les gaz, au contraire, la densité, qui est variable, est donnée par la formule :

$$p = k\rho\,(1 + \alpha\theta)$$

θ étant la température, α désignant une constante commune à tous les gaz, k une constante caractéristique de chaque gaz : on peut la définir la pression qu'il faut exercer sur le gaz à la température de 0° pour réduire sa densité à l'unité.

L'équation fondamentale, combinée avec celle-ci, donne :

$$\frac{dp}{p} = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{k\,(1 + \alpha\theta)}$$

relation qui prouve l'existence d'une fonction des forces dans le cas où la température est uniforme dans toute l'étendue de

la masse gazeuse. On en déduit alors, en intégrant :

$$\operatorname{Log} p = \frac{\varphi(xyz)}{k(1+\alpha\theta)} + \operatorname{Log} C$$

C désignant une constante ; ou :

$$p = Ce^{\frac{\varphi}{k(1+\alpha\theta)}}$$

151. Cas d'une masse fluide soumise à la seule action de la pesanteur. — Si cette masse est peu étendue, on peut supposer que la pesanteur a la même valeur et la même direction en tous les points. En prenant l'axe des z dirigé vers le bas, on a, pour équation d'équilibre :

$$dp = \rho g dz$$

On en déduit :

$$(2) \qquad p - p_0 = g\int_{z_0}^{z} \rho \, dz$$

Les surfaces de niveau sont des plans horizontaux ; car on a, en tous leurs points :

$$dp = 0$$

et par suite

$$dz = 0$$

ou

$$z = C^{te}$$

Comme il existe évidemment, dans le cas actuel, une fonction des forces, la densité et la pression seront constantes dans un plan horizontal ; l'équation (2) exprime que la diffé-

rence de pression en deux points z, z_0, est égale au poids d'un cylindre ayant pour base l'unité de surface, pour hauteur $z - z_0$, et tel que la densité en chacune de ses sections horizontales soit la même que celle du fluide dans le plan de cette section.

Si le fluide est contenu dans un vase et si l'on peut regarder la pression atmosphérique comme constante, la surface libre, étant une surface de niveau, est horizontale. Soit, en particulier, un liquide contenu dans un vase de fond horizontal; soit z la cote commune à tous les points du fond, z_0 celle de la surface libre, p_0 la valeur constante de la pression atmosphérique; la pression en un point du fond est:

$$p = p_0 + \rho g (z - z_0)$$

Sur la surface entière b du fond la pression est donc:

$$pb = p_0 b + \rho g b (z - z_0)$$

Cette pression se compose donc de la pression atmosphérique $p_0 b$, transmise intégralement, et du poids d'un cylindre liquide ayant pour base la surface du fond et pour hauteur sa distance à la surface libre. Elle est indépendante de la forme du vase et de la surface libre, qui peut être très petite ; ce qui explique l'expérience connue du tonneau de Pascal.

Si plusieurs liquides pesants, non miscibles, sont superposés dans un même vase, les surfaces de séparation seront des plans horizontaux, car autrement la densité ne serait plus la même en tous les points d'un même plan horizontal.

L'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} \rho \, dz$$

se compose de plusieurs parties, puisque la densité ρ est discontinue; la pression sur le fond horizontal est encore égale à la pression atmosphérique augmentée de la colonne liquide définie précédemment, dans laquelle les densités changent de la même manière que dans le liquide donné.

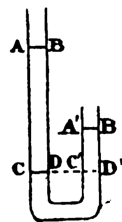


Fig. 177.

Si on considère, en particulier, deux liquides contenus dans un système de vases communiquants (*fig.* 177), on voit facilement que les hauteurs des surfaces libres AB, A'B' au-dessus de la surface de séparation CD sont en raison inverse des densités, il suffit pour cela de remarquer que les pressions dans les deux branches sont les mêmes dans le plan horizontal CD, C'D'.

152. Résultante des pressions sur une paroi plane. — Soit un liquide soumis à la seule action de la pesanteur : considérons une paroi plane du vase qui le contient (*fig.* 178) dont le point le plus haut est A et le point le plus bas C. Menons dans son plan les horizontales AB, CD et la ligne de plus grande pente AH qui leur est perpendiculaire. Soit M

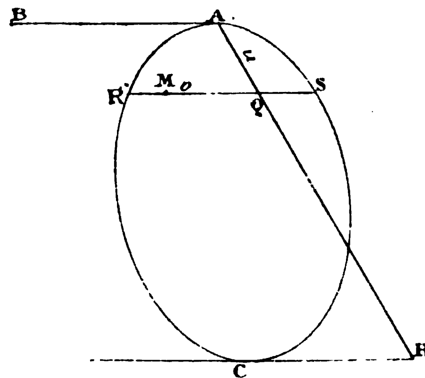


Fig. 178.

un point quelconque de la paroi ; v, sa distance MQ à la ligne

de plus grande pente; u, la distance AQ. Nous supposerons la pression atmosphérique exercée à la surface libre remplacée par une couche de liquide, ce qui permettra de supprimer le terme p_0 de l'équation fondamentale (**151**). Les pressions du liquide sur tous les éléments de la paroi plane considérée admettent évidemment une résultante. Soit P la pression totale exercée sur la paroi ; c, la distance du point A à la surface libre (définie comme nous l'avons dit) ; α, l'inclinaison de la paroi sur l'horizon. L'équation de l'équilibre en M est :

$$p = \rho g z$$

z étant la distance de M à la surface libre. Mais on a :

$$z = c + u \sin \alpha$$

donc :

$$p = \rho g (c + u \sin \alpha)$$

La pression sur un élément de paroi est *pdudv ;* et la pression totale est par suite

$$\mathrm{P} = \rho g \int\int (c + u \sin \alpha)\, du\, dv$$

l'intégrale étant supposée étendue à toute la surface de la paroi.

Désignons par v', v'' les distances QR, QS du point Q aux points de rencontre de l'horizontale MQ avec la courbe limitant la paroi, et appelons w la dimension transversale RS de cette paroi On a :

$$v' - v'' = w$$

Soient u_1, v_1 les coordonnées par rapport aux axes AH et AB

du point d'application de la pression résultante, qu'on appelle centre de pression ; en appliquant le théorème des moments par rapport aux droites AB, AH, on a :

$$Pu_1 = \int\int p\, u\, du\, dv = g\rho \int\int (c + u \sin\alpha)\, u\, du\, dv$$

$$Pv_1 = \int\int p\, v\, du\, dv = g\rho \int\int (c + u \sin\alpha)\, v\, du\, dv$$

En appelant A l'aire totale de la paroi et z' la distance de son centre de gravité à la surface libre, on a :

$$\int\int z\, du\, dv = Az'$$

d'où :

$$P = A\rho g z'$$

La pression totale est donc égale au poids d'un cylindre liquide qui aurait pour base la paroi et pour hauteur la distance de son centre de gravité à la surface libre.

En associant des éléments de surface pris sur une même horizontale, on a :

$$\int dv = v' - v'' = w$$

$$\int v\, dv = \frac{v'^2 - v''^2}{2} = \frac{v' + v''}{2}\, w$$

Si le contour de la paroi est donné, on peut regarder v', v'' et w comme des fonctions de u.

Par suite, en désignant par h la longueur AH :

$$P = g\rho \int_0^h (c + u \sin \alpha)\, w\, du$$

$$Pu_1 = \rho g \int_0^h (c + u \sin \alpha)\, uw\, du$$

$$Pv_1 = \frac{\rho g}{2} \int_0^h (c + u \sin \alpha)\, (v' + v'')\, w\, du$$

Si le contour de la paroi admet un diamètre rectiligne conjugué de la direction SR des cordes horizontales, la surface se partagera en tranches symétriques par rapport à ce diamètre qui passera par le centre de pression.

Le centre de pression est d'ailleurs toujours plus bas que le centre de gravité, car, sur deux éléments d'égale surface, la pression sur celui qui est le plus bas est la plus grande.

Dans le cas où c est nul, c'est-à-dire quand le point le plus haut de la paroi affleure à la surface, sin α sort du signe d'intégration et les formules montrent que l'inclinaison du plan n'a pas alors d'influence sur la position du centre de pression.

153. Application. — Considérons le cas particulier où la paroi est un trapèze ABCD (*fig.* 179) dont les bases sont horizontales. Le centre de pression se trouve sur la droite EF joignant les milieux des bases ; il suffit de calculer sa coordonnée u_1. La longueur w de la transversale GH, menée à une distance u de AB, croît proportionnellement à cette distance, et sa valeur est :

$$w = a + (b - a)\frac{u}{h}$$

en conservant les notations du paragraphe précédent et appelant a et b les deux bases.

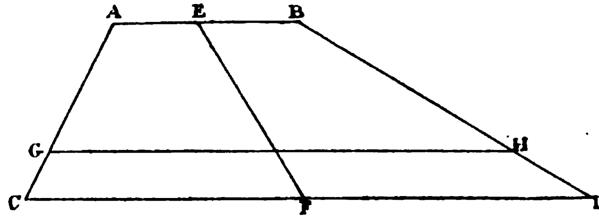


Fig. 179.

On a donc :

$$P = g\rho \int_0^h (c + u \sin \alpha) \left[a + (b - a) \frac{u}{h} \right] du$$

ou :

$$P = g\rho \left[ach + \left(a \sin \alpha + \frac{c(b - a)}{h} \right) \frac{h^2}{2} + \frac{b - a}{h} \sin \alpha \frac{h^3}{3} \right]$$

ou :

$$P = g\rho \frac{h}{6} [3c(a + b) + h \sin \alpha (a + 2b)]$$

On a aussi :

$$Pu_1 = g\rho \int_0^h (c + u \sin \alpha) \left[a + (b - a) \frac{u}{h} \right] u du$$

ou :

$$Pu_1 = g\rho \left[ac \frac{h^2}{2} + \left(a \sin \alpha + \frac{c(b - a)}{h} \right) \frac{h^3}{3} + \frac{b - a}{h} \sin \alpha \frac{h^4}{4} \right]$$

ou :

$$Pu_1 = g\rho \frac{h^2}{12} [2c (a + 2b) + h \sin \alpha (a + 3b)]$$

On en déduit :

$$u_1 = h \frac{2c (a + 2b) + h \sin \alpha (a + 3b)}{2[3c (a+b) + h \sin \alpha (a + 2b)]}$$

En particulier, si le côté AB affleure à la surface du liquide, c'est-à-dire si l'on a $c = 0$, la formule devient :

$$u_1 = h \frac{a + 3b}{2 (a + 2b)}$$

Si a est nul, c'est-à-dire si le trapèze est réduit à un triangle dont le sommet affleure et dont la base est horizontale, on a :

$$u_1 = \frac{3}{4} h$$

Si b est nul, c'est-à-dire si le trapèze est réduit à un triangle dont la base horizontale affleure à la surface du liquide, on a :

$$u_1 = \frac{h}{2}$$

Si a et b sont égaux, c'est-à-dire si la figure est un parallélogramme, on a :

$$u_1 = \frac{2}{3} h$$

154. Principe d'Archimède. — Si la paroi plongée dans le liquide n'est pas plane, les pressions n'admettent pas, en

général, de résultante unique ; toutefois, cette résultante est connue dans le cas où la paroi considérée est la surface extérieure d'un corps plongé en tout ou en partie dans un liquide ; elle est égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre de gravité du liquide déplacé.

Soient ω un élément de la surface du corps plongé ; p la pression, rapportée à l'unité de surface, que le liquide exerce sur cet élément ; α, β, γ les cosinus des angles de la normale à l'élément avec trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz tels que Oz soit vertical et dirigé vers le bas. Les composantes suivant les axes de la pression $p\omega$ supportée par l'élément sont :

$$p\omega\alpha \qquad p\omega\beta \qquad p\omega\gamma$$

Prenons ω pour base d'un cylindre dont les arêtes sont parallèles à Ox et supposons ce cylindre isolé dans le corps ; il découpe sur la surface du corps un deuxième élément ω' et, les surfaces de niveau étant des plans horizontaux, puisque le liquide est soumis à la seule action de la pesanteur, la pression, rapportée à l'unité de surface, est la même sur ω' que sur ω : les composantes de la pression sur ω' sont donc :

$$p\omega'\alpha' \qquad p\omega'\beta' \qquad p\omega'\gamma'$$

Mais $\omega\alpha$ et $\omega'\alpha'$ sont deux expressions de la section droite du cylindre, égales et de signes contraires. Les deux composantes $p\omega\alpha$ et $p\omega'\alpha'$ se détruisent donc ; il en aurait été de même des composantes $p\omega\beta$ et $p\omega'\beta'$, si l'on avait considéré un cylindre ayant des génératrices parallèles à Oy. Les composantes verticales interviennent donc seules dans l'expression de la résultante. Considérons encore un cylindre de base ω dont les arêtes soient verticales ; il découpe sur la surface

du corps un élément ω_1, qui supporte une pression dont la composante verticale est $p_1\omega_1\gamma_1$. La résultante des pressions verticales sur ω et ω_1 est donc :

$$p\omega\gamma + p_1\omega_1\gamma_1 = (p - p_1)c$$

en appelant c la section droite du cylindre. Or, on a :

$$p - p_1 = g\int_{z_1}^{z} \rho \, dz$$

Donc, la résultante des pressions sur ω et ω_1 est :

$$cg\int_{z_1}^{z} \rho dz$$

Elle est égale au poids du cylindre liquide déplacé par le cylindre isolé dans le corps. La résultante générale des pressions, obtenue en associant ainsi tous les éléments de paroi est donc bien égale au poids du liquide déplacé par le corps.

Le principe s'applique au cas d'un corps plongé partiellement dans un liquide et dans un gaz : la pression est égale à la somme des poids du liquide et du gaz déplacés et appliquée au centre de gravité commun des masses liquide et gazeuse déplacées. Le corps est alors soumis seulement à des forces verticales et, s'il est abandonné sans vitesse initiale, le centre de gravité décrit la verticale passant par sa position initiale.

On peut démontrer sans calcul le principe d'Archimède. Si un corps plongé dans un liquide est en équilibre, la masse liquide déplacée, substituée à ce corps, serait aussi en équilibre; mais elle serait soumise seulement à l'action de la pesanteur et aux actions moléculaires du liquide contigu ; ces actions, puisqu'il y a équilibre, ont donc une résultante égale et contraire au poids du liquide déplacé.

On établit de même que la résultante des pressions exercées par un liquide sur les parois du vase qui le renferme est égale au poids du liquide contenu dans le vase.

155. Equilibre d'un corps flottant. — Nous allons chercher dans quels cas l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide est stable ou instable. A cet effet, nous supposerons que le corps admette dans sa position d'équilibre un plan de symétrie vertical et que ce plan reste vertical pour tout déplacement infiniment petit imprimé au corps. Les vitesses initiales de tous les points du corps devront être parallèles au plan de symétrie ; nous les supposons de plus assez faibles pour que la pression puisse être considérée comme la même dans l'état de repos et dans l'état de mouvement. Soient (*fig.* 180) APCC'A' la section du corps

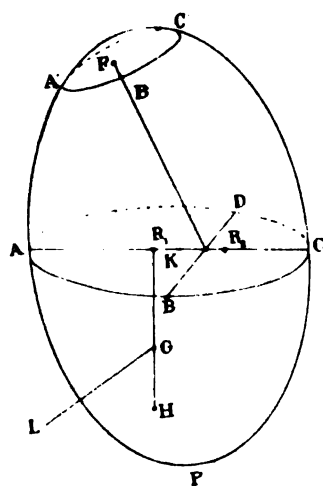


Fig. 180.

par le plan de symétrie, ABC, A'B'C' les sections faites par les plans de flottaison dans la position d'équilibre et dans une position infiniment voisine, G le centre de gravité du corps, H celui du liquide déplacé dans la position d'équilibre, I celui de l'aire ABC, K la trace de la droite GH sur le plan ABCD, ζ la distance à l'époque t du centre de gravité I de l'aire ABC au plan A'B'C', θ l'angle des deux plans de flottaison, z la dis-

tance du point G au niveau du liquide à l'époque t, ρ la densité uniforme du liquide, M la masse du corps et V le volume de la partie APCD. Posons:

$$GH = a \qquad GK = h \qquad KI = i$$

Représentons par b l'aire ABCD et par $b\gamma^2$ le moment d'inertie de cette surface par rapport à la droite BD passant par le point I et perpendiculaire au plan de symétrie. Les points H, G, K, I appartiennent évidemment au plan de symétrie. Nous regarderons ζ et θ comme de petites quantités et nous négligerons leurs puissances d'exposant supérieur à 1.

D'après le principe d'Archimède, on a:

$$M = \rho V$$

D'autre part, en projetant le contour GKIF sur la verticale, on obtient:

$$z = \zeta - i \sin \theta + h \cos \theta$$

ou, en regardant θ comme un infiniment petit du premier ordre:

$$z = \zeta - i\theta + h$$

Ceci posé, cherchons à évaluer ζ et θ en fonction du temps. Appliquons le théorème du mouvement du centre de gravité d'un système. Le centre de gravité d'un corps se meut comme un point libre auquel serait concentrée la masse du corps et auquel on aurait transporté parallèlement à elles-mêmes toutes les forces extérieures appliquées au corps. Or, dans le cas présent, les forces extérieures sont d'une part, le poids du corps égal et contraire à la poussée qu'exerce le

liquide sur la portion APC du corps, d'autre part la poussée du liquide sur la partie du corps comprise entre les deux plans de flottaison. Cette partie pouvant être, si l'on néglige des quantités d'ordre supérieur, assimilée à un cylindre de base A'B'C' et de hauteur ζ, a pour volume $b \cos\theta . \zeta$ ou $b\zeta$. La poussée qu'exerce sur elle le liquide a donc pour valeur :

$$g\rho b\zeta$$

Par suite :

$$\mathrm{M}\frac{d^2z}{dt^2} = - g\rho b\zeta$$

ou, en remplaçant M et z par leurs valeurs :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - i\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\frac{b}{\mathrm{V}}\zeta = 0$$

Appliquons maintenant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à la droite GL perpendiculaire au plan de symétrie et qui, d'après nos hypothèses reste horizontale dans les oscillations du corps. Le poids du corps, appliqué au point G, a un moment nul ; la poussée du liquide sur la portion APC, étant appliquée en H a un moment égal à $g\rho\mathrm{V}a \sin\theta$. Quant au moment de la poussée du liquide sur la partie du corps comprise entre les deux plans de flottaison, considérons pour l'évaluer, un élément de surface $d\sigma$ situé dans l'aire ABCD, et désignons par y sa distance à la droite BD et par z_1 sa distance à l'aire A'B'C'. Le poids du cylindre de liquide ayant pour base cet élément et dont les arêtes sont verticales est :

$$g\rho \cos\theta . z_1 \, d\sigma$$

Par suite, son moment est:

$$g\rho \cos\theta . x_1 \, (h \sin\theta + i \cos\theta + y \cos\theta) \, d\sigma$$

Or:

$$x_1 = \zeta + y \sin\theta$$

Donc le moment cherché a pour expression:

$$g\rho \int (\zeta y + y^2\theta + i\zeta + yi\theta) \, d\sigma$$

les termes négligés contenant en facteur des puissances supérieures de ζ et de θ.

Le théorème des moments des quantités de mouvement donne donc l'équation :

$$MK^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = ag\rho V\theta - g\rho \int (\zeta y + y^2\theta + i\zeta + iy\theta) \, d\sigma$$

Ou bien encore, en ayant égard à ce que I est le centre de l'aire ABCD :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gbi\zeta}{VK^2} + \frac{g\theta}{VK^2}(b\gamma^2 - aV) = 0$$

Cas particuliers. — 1° Supposons $i = 0$ c'est-à-dire le centre de gravité de l'aire ABCD situé à l'époque initiale sur la verticale du point G. Les deux équations du mouvement intégrées donnent alors :

$$\zeta = A \cos\left(\sqrt{\frac{gb}{V}}\, t + \alpha\right)$$

$$\theta = B \cos\left(\sqrt{g\,\frac{b\gamma^2 - aV}{VK^2}}\, t + \beta\right)$$

A et B désignant deux constantes arbitraires. Comme nous avons supposé les valeurs initiales de ζ et θ très petites ainsi que celles de leurs dérivées premières, il en est de même des constantes A et B. Donc, quelles que soient les valeurs attribuées au temps, les expressions de ζ et θ restent très petites à condition toutefois que :

$$b\gamma^2 - aV > 0$$

Si donc le centre de gravité du liquide déplacé est ou au-dessous du centre de gravité du corps, ou au dessus et tel que :

$$a < \frac{b\gamma^2}{V}$$

l'équilibre est stable. L'oscillation du centre de gravité, projeté sur une verticale peut dans ce cas être comparée à l'oscillation d'un pendule simple ayant pour longueur $\frac{V}{b}$. Si au contraire on avait $b\gamma^2 - aV < 0$, la variable θ s'exprimerait en fonction du temps par une exponentielle, et le mouvement ne serait plus oscillatoire.

2° Supposons $i \neq 0$. Portons la valeur de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ fournie par la seconde équation dans la première, et posons :

$$m = \frac{gb}{VK^2}(i^2 + K^2) \qquad n = \frac{gb}{VK^2}(b\gamma^2 - aV) \qquad p = \frac{gbi}{VK^2}$$

Les deux équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + m\zeta + ni\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + p\zeta + n\theta = 0$$

Pour les intégrer, multiplions la seconde par un facteur λ constant et ajoutons-la à la première ; il vient :

$$(1) \quad \frac{d^2(\zeta + \lambda\theta)}{dt^2} + (m + p\lambda)\,\zeta + n\,(i + \lambda)\,\theta = 0$$

Mais λ est arbitraire ; on peut donc, en lui attribuant une valeur convenable, faire en sorte que cette dernière équation ne renferme plus que la fonction inconnue $\zeta + \lambda\theta$. Il suffit de déterminer λ par l'équation :

$$(2) \qquad p\lambda^2 + \lambda\,(m - n) - ni = 0$$

L'équation (1) intégrée donne alors :

$$\zeta + \lambda_1\theta = A_1 \cos\left(\sqrt{m + p\lambda_1}\; t + \alpha_1\right)$$

ou

$$\zeta + \lambda_2\theta = A_2 \cos\left(\sqrt{m + p\lambda_2}\; t + \alpha_2\right)$$

suivant qu'on prend pour λ l'une ou l'autre des deux racines de l'équation (2). Si les deux facteurs $m + p\lambda_1$ et $m + p\lambda_2$ sont réels et positifs, l'équilibre sera stable. Cherchons quelles hypothèses on doit faire sur les données pour que ces conditions soient remplies. A cet effet, formons l'équation qui admet pour racines les quantités $m + p\lambda_1$ et $m + p\lambda_2$. Il suffit pour cela de poser :

$$m + p\lambda = \mu$$

et d'éliminer λ entre cette dernière équation et l'équation (2). On obtient alors l'équation :

$$\mu^2 - (m + n)\,\mu + \frac{ngb}{V} = 0$$

qui pour la stabilité de l'équilibre doit avoir ses racines réelles et positives. Leur produit doit donc être positif, ce qui exige que l'on ait :

$$b\gamma^2 - aV > o$$

Cette condition nécessaire est suffisante. En effet, si $n > o$ le produit $-\frac{ni}{p}$ des racines de l'équation en λ est négatif; donc les racines de l'équation en λ et par suite celles de l'équation en μ sont bien réelles. On vérifie d'ailleurs immédiatement que leur somme est positive.

On peut se représenter l'oscillation du corps flottant en déterminant sur la ligne AC deux points R_1 et R_2 tels que :

$$IR_1 = \lambda_1 \qquad IR_2 = \lambda_2$$

D'après ce qui précède, ces deux points, projetés sur la verticale, oscillent comme les extrémités de deux pendules simples dont les longueurs respectives sont :

$$\frac{g}{m + p\lambda_1} \quad \text{et} \quad \frac{g}{m + p\lambda_2}$$

156. Figure d'équilibre d'un fluide pesant tournant autour d'un axe vertical. — L'expérience montre que si la masse fluide a atteint une figure d'équilibre, elle ne s'en écarte pas, tant que la vitesse de rotation reste uniforme. Nous supposerons la masse fluide soumise uniquement à l'action de la pesanteur. Nous écrirons qu'elle est en équilibre relatif, en supposant chaque molécule soumise à l'action de la pesanteur et d'une force fictive égale et contraire à celle

qui produirait l'accélération d'entraînement. Cette accélération d'entraînement, dirigée vers l'axe de rotation et perpendiculaire à cet axe, a pour projections sur les axes coordonnés :

$$-\omega^2 x, \qquad \omega^2 y, \qquad 0$$

x, y, z, désignant les coordonnées de la molécule fluide considérée. Par suite, chaque molécule est en équilibre sous l'action des forces dont les projections rapportées à l'unité de masse sur les axes coordonnés sont :

$$\begin{matrix} 0, & 0, & -g \\ \omega^2 x, & \omega^2 y, & 0 \end{matrix}$$

L'équation fondamentale de l'hydrostatique est donc :

$$dp = \rho\,[\omega^2(xdx + ydy) - gdz]$$

ou :

$$dp = \frac{\rho}{2}\, d\,(\omega^2 r^2 - 2gz)$$

L'équilibre est donc possible si ρ est une quantité constante ou une fonction de p seulement.

Nous traiterons le cas de $\rho = C^{te}$ c'est-à-dire du liquide incompressible. L'équation précédente intégrée donne alors :

$$p = \frac{\rho}{2}(\omega^2 r^2 - 2gz) + C^{te}$$

L'équation des surfaces de niveau est par suite :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + k$$

Déterminons en particulier celle qui répond à la surface libre du liquide. A cet effet nous supposons le liquide renfermé dans un vase cylindrique de rayon R et admettant pour axe l'axe de rotation. Nous déterminons alors la constante k en écrivant que le volume du liquide renfermé dans le vase est le même quand le liquide est en repos ou en mouvement, ce qui donne en appelant h la hauteur du liquide à l'état de repos et en prenant pour plan des xy le fond du vase :

$$\pi h R^2 = 2\pi \int_0^R z r dr$$

ou :

$$h R^2 = \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{R^4}{4} + k R^2$$

D'où l'on déduit :

$$k = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

La surface libre du liquide a donc pour équation :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

C'est un paraboloïde de révolution d'axe vertical.

Toutefois le résultat trouvé n'est exact que si le paraboloïde a son sommet au-dessus du fond du vase, c'est-à-dire si

$$h \geqslant \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Dans le cas contraire, l'intégrale a des éléments négatifs et

ne représente plus le volume du liquide. Nous écrirons alors l'équation de la surface libre :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - k'$$

k' désignant une constante positive. La surface libre est coupée par le fond du vase suivant un cercle dont le rayon est $\frac{\sqrt{2gk'}}{\omega}$ et l'équation qui détermine k' est :

$$2\pi \int_{\frac{\sqrt{2gk'}}{\omega}}^{R} zr\, dr = \pi h R^2$$

ou :

$$hR^2 = 2 \int_{\frac{\sqrt{2gk'}}{\omega}}^{R} \left(\frac{\omega^2 r^3}{2g} - k'r \right) dr$$

$$hR^2 = \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{g^2 k'^2}{\omega^4} \right) - k' \left(R^2 - \frac{2gk'}{\omega^2} \right)$$

$$gk'^2 - k'R^2\omega^2 + R^2\omega^2 \left(\frac{R^2\omega^2}{4g} - h \right) = 0$$

Les racines de cette équation du second degré en k' sont réelles, car on a :

$$R^4\omega^4 - R^2\omega^2 (R^2\omega^2 - 4gh) > 0$$

Elles sont positives car leur somme et leur produit sont positifs, puisque, par hypothèse, on a :

$$h < \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

L'équation de la surface libre doit donner une valeur positive de z pour $r = R$. Par suite, il faut que l'on ait :

$$k' < \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

Or, la demi-somme des racines de l'équation en k' est précisément

$$\frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

La plus petite de ces racines est donc la seule qui convienne.

La formule qui donne la pression est alors, si l'on désigne par ϖ la pression atmosphérique,

$$p = \varpi + \frac{\rho}{2}(\omega^2 r^2 - 2gz + 2gk)$$

car le dernier terme s'annule à la surface libre, et la formule donne bien alors $p = \varpi$.

157. Équilibre de l'atmosphère terrestre. Mesure de l'altitude avec le baromètre. — Si l'atmosphère terrestre est en équilibre sous l'action de l'attraction de la terre et de la force centrifuge, dont la pesanteur est la résultante, les surfaces de niveau sont en tous leurs points normales à la direction de la pesanteur. La surface des mers est donc une surface de niveau pour l'atmosphère. De plus, comme il y a une fonction des forces, les surfaces de niveau sont aussi surfaces d'égale densité. Or, on a, en chaque point :

$$p = k\rho\,(1 + \alpha\theta)$$

θ désignant la température, k et α étant deux constantes;

cette formule montre que θ est constant sur les surfaces de niveau et, par suite, ces surfaces sont aussi des surfaces d'égale température. Mais cette conclusion est en désaccord complet avec l'expérience, faite à la surface des mers, par exemple. L'équilibre de l'atmosphère est donc impossible.

Cependant, en appliquant l'équation d'équilibre à une portion peu étendue de l'atmosphère, on est conduit à des résultats vérifiés dans une certaine mesure par l'observation.

Considérons une colonne d'air autour d'une verticale Oz dirigée en sens contraire de la pesanteur. Soient Ox, Oy deux axes perpendiculaires à Oz. L'équation d'équilibre est ici :

$$dp = - g\rho\, dz$$

On a d'ailleurs :

$$p = k\rho\,(1 + \alpha\theta)$$

On en déduit :

$$\frac{dp}{p} = - \frac{g\, dz}{k\,(1 + \alpha\theta)}$$

Si la verticale Oz est prolongée à une grande hauteur, g n'est pas constant. Mais, si l'on suppose la terre composée de couches concentriques homogènes, son attraction sera la même que si sa masse était concentrée à son centre et variera, par suite, en raison inverse du carré de la distance au centre. En appelant R le rayon de la terre, z l'altitude d'un point M de la verticale, g_0 la valeur de g au niveau de la mer, on a alors :

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + z)^2}$$

et l'équation s'écrit :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 R^2 dz}{k\,(R+z)^2\,(1+\alpha\theta)}$$

Supposons θ constant ; l'intégration sera possible, et l'on aura entre les limites z' et z :

$$\text{Log}\,\frac{p}{p'} = -\frac{g_0 R^2}{k\,(1+\alpha\theta)}\int_{z'}^{z}\frac{dz}{(R+z)^2}$$

$$\text{Log}\,\frac{p}{p'} = \frac{g_0}{k\,(1+\alpha\theta)}\,\frac{z'-z}{\left(1+\frac{z}{R}\right)\left(1+\frac{z'}{R}\right)}$$

$$z - z' = \frac{k\,(1+\alpha\theta)}{g_0}\left(1+\frac{z}{R}\right)\left(1+\frac{z'}{R}\right)(\text{Log}\,p' - \text{Log}\,p)$$

On applique ce résultat à la mesure de l'altitude avec le baromètre. Soit M une station dont on cherche l'altitude z ; on a mesuré en ce point la pression barométrique p ainsi que la pression p' à une station M′ d'altitude connue z'. La température θ varie d'une station à l'autre ; mais le binôme $1 + \alpha\,\theta$, varie très peu par suite de la petitesse de α, et l'on peut, sans erreur sensible, supposer, comme on vient de le faire, θ constant en lui donnant pour valeur la moyenne des températures aux deux stations M et M′. On calcule alors z à l'aide de la formule précédente par approximations successives, en remplaçant d'abord dans le second membre z par une valeur approchée, toujours connue d'avance, puis par la première valeur calculée, puis par la valeur suivante, etc., jusqu'à ce que deux résultats successifs soient sensiblement les mêmes. Comme z est très petit par rapport à R, le terme $1 + \frac{z}{R}$ sera

peu différent de l'unité : son influence sera très faible et le calcul se terminera rapidement.

En réalité, il faut encore tenir compte de l'état hygrométrique de l'atmosphère aux deux stations. De plus, on ne doit pas prendre sans correction pour valeur de $\frac{p}{p'}$ le rapport des hauteurs barométriques observées B, B' ; il faut tenir compte de la variation de la pesanteur de M en M' et prendre pour $\frac{p}{p'}$ l'expression :

$$\frac{p}{p'} = \frac{B}{B'} \frac{(R + z')^2}{(R + z)^2}$$

que l'on calcule avec une valeur approchée de z.

HYDRODYNAMIQUE

158. Équation fondamentale. — Le principe de d'Alembert permet de traiter un problème de dynamique comme un problème de statique en ajoutant aux forces réelles les forces d'inertie; nous déduirons donc les équations de l'hydrodynamique de celles de l'hydrostatique; les théorèmes démontrés subsistent et la pression du liquide sur un élément de surface infiniment petit est indépendante de sa direction.

L'état de chaque point d'un fluide en mouvement est défini lorsqu'on connaît la pression élémentaire p exercée par le liquide en ce point, sa densité ρ et les composantes u, v, w suivant trois axes fixes de sa vitesse. Il faut donc déterminer cinq fonctions p, ρ, u, v, w des coordonnées x, y, z du point considéré et du temps t. Les équations fondamentales de l'hydrostatique deviennent, en introduisant la force d'inertie :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \gamma_x$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \gamma_y$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \gamma_z$$

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ étant les projections sur les axes de l'accélération de la molécule qui a pour coordonnées x, y, z à l'époque t. Les composantes u, v, w de la vitesse de la molécule considérée dépendent de x, y, z, t. La variation de la composante u, relative à cette molécule, dans l'intervalle de temps infiniment petit dt, a pour expression

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

ou :

$$du = dt \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Divisant par dt et passant à la limite, on en déduit:

$$\gamma_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Les valeurs de γ_y, γ_z s'en déduisent par analogie, et les équations précédentes s'écrivent:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

A ces trois premières équations nous joindrons l'*équation de continuité*. Pour la trouver, imaginons à l'intérieur du liquide une petite surface fermée quelconque, un parallélipipède, par exemple, d'arêtes parallèles aux axes (*fig.* 181). Dans l'intervalle de temps dt, il entre dans ce parallélipipède une masse m de liquide et il en sort une masse m'. Par

la face QMR parallèle à yOz pénètre un volume de liquide égal à

$$dy\ dz\ u\ dt$$

dont la masse est

$$\rho\ u\ dy\ dz\ dt$$

Il sort en même temps par la face opposée, x ayant seul

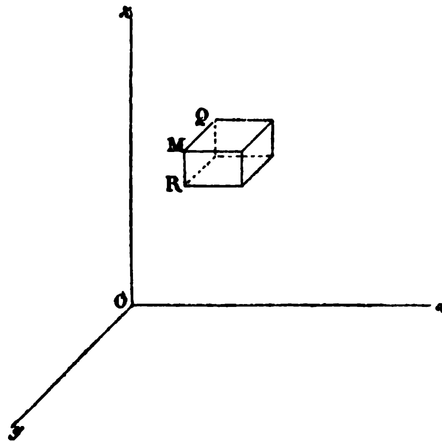


Fig. 181

varié, une masse de liquide égale à

$$\left[\rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x}\, dx\right] dy\ dz\ dt$$

L'accroissement de masse relatif à cette face est donc :

$$-\frac{\partial (\rho u)}{\partial x}\, dx\ dy\ dz\ dt$$

et, en faisant un calcul analogue pour deux autres faces con-

tiguës à la première, l'accroissement total est :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz\,dt$$

D'ailleurs le volume du parallélipipède reste le même et le changement de masse est dû au changement de densité ; il a donc pour valeur :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

En égalant ces deux expressions, on obtient l'équation de continuité :

$$(2)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

La cinquième équation nécessaire est celle qui lie la densité et la pression : elle est spéciale à chaque fluide. Dans le cas d'un fluide incompressible, on a :

$$\rho=C^{te}$$

et l'équation (2) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Ces cinq équations aux dérivées partielles sont les équations fondamentales de l'hydrodynamique. Pour déterminer complètement les fonctions arbitraires introduites par l'intégration, dans les cas exceptionnels où elle est possible, il est nécessaire de connaître l'état de fluide à l'origine du temps et les conditions limites relatives à la forme du vase qui contient le liquide et à la surface libre du liquide.

159. Régime permanent. — On dit qu'il s'établit dans un liquide en mouvement un régime permanent lorsque toutes les molécules possèdent la même vitesse au moment où elles passent au même point. C'est le cas d'une rivière dont le cours est régulier.

Dans ces hypothèses, u, v, w ne dépendent pas du temps et les équations fondamentales s'écrivent :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

Considérons le déplacement réel infiniment petit d'une molécule liquide. On aura :

$$dx = u\,dt$$
$$dy = v\,dt$$
$$dz = w\,dt$$

Multiplions les équations (3) respectivement par dx, dy, dz et ajoutons-les membre à membre en supposant qu'il y ait une fonction des forces φ ; nous aurons :

$$\frac{dp}{\rho} = d\varphi - udu - vdv - wdw$$

ou :

$$\frac{dp}{\rho} = d\varphi - d\,\frac{V^2}{2}$$

en appelant V^2 le carré de la vitesse :

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

Si ρ est constant, on a en intégrant :

$$\frac{p}{\rho} = \varphi - \frac{1}{2} V^2 + C^{te}$$

équation qui doit avoir lieu à une époque déterminée, tout le long de la trajectoire d'une molécule liquide.

En particulier, si la seule force extérieure est la pesanteur :

$$\varphi = gz$$

et

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{V^2}{2} + C^{te}$$

C'est le théorème de Bernoulli, dans le cas des liquides. Si on l'applique à l'exemple traité précédemment (**156**) où l'on a à la surface libre :

$$V^2 = \omega^2 (x^2 + y^2)$$
$$p = C^{te}$$

on trouve, pour équation de cette surface libre :

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2} z + C^{te}$$

La surface libre ne peut donc être qu'un paraboloïde dont la forme ne dépend que de ω et pas de la forme du vase.

160. Théorème de Torricelli. — Faisons une application des formules précédentes à un liquide pesant renfermé dans un vase percé à sa partie inférieure d'une ouverture très petite par rapport à la surface libre du liquide. Nous sommes alors dans le cas d'un liquide en régime permanent

où la fonction φ a pour valeur

$$gz$$

l'axe des z étant vertical et dirigé vers le bas. Par suite :

$$p = g\rho z - \frac{\rho v^2}{2} + C^{te}$$

ou bien encore en désignant par p_0, z_0, v_0 les valeurs des quantités p, z, v à la surface du liquide

$$(1) \qquad p - p_0 = g\rho\,(z - z_0) - \rho\,\frac{v^2 - v_0^2}{2}$$

Or entre v et v_0 on peut établir une relation simple. L'expérience montre en effet que pendant l'écoulement il ne se produit aucun vide entre les molécules liquides. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le débit du filet soit le même en un point quelconque de son étendue, ce qui exige qu'on ait la relation

$$v\sigma = v_0\sigma_0$$

σ et σ_0 désignant les aires des sections droites d'un même filet liquide à la partie supérieure et à la partie inférieure du vase. Donc

$$v^2 - v_0^2 = v^2\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)$$

Mais $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ est une quantité infiniment petite, car tous les filets liquides partant de la surface du liquide viennent passer par l'ouverture inférieure et se contractent par suite considérablement. Si donc nous admettons que la pression à l'ouverture est égale à la pression atmosphérique p_0, la formule (1)

devient :

$$g\rho h - \frac{\rho v^2}{2} = o$$

h désignant la hauteur du liquide au-dessus de l'orifice. Par suite :

$$v = \sqrt{2gh}$$

D'où le théorème suivant connu sous le nom de théorème de Torricelli :

La vitesse d'écoulement d'un liquide renfermé dans un vase percé d'une ouverture infiniment petite est à peu près la même que celle d'un corps tombant en chute libre d'une hauteur égale à celle du liquide au-dessus de l'orifice.

161. Transmission des ondes dans une masse gazeuse. — Nous supposerons la masse gazeuse soumise à

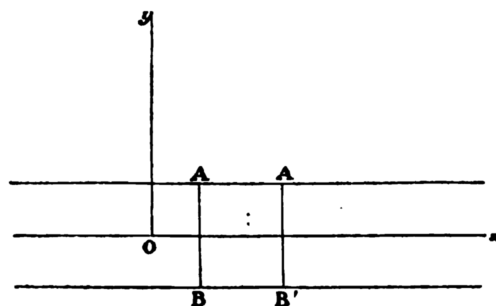


Fig. 182.

une température uniforme et renfermée dans un tube cylindrique indéfini. Nous supposerons de plus que son mouvement consiste en un ébranlement parallèle aux génératrices du cylindre, c'est-à-dire qu'à l'origine toutes les molécules de gaz renfermées dans une section droite AB du tube (*fig.* 182)

reçoivent des vitesses très petites, égales entre elles, et parallèles aux génératrices du cylindre.

Il est évident qu'il en sera de même à une époque quelconque pour toutes les molécules de gaz renfermées dans une section droite du tube ; p et ρ auront par suite même valeur dans cette section. Si donc on prend pour direction de l'axe des x celle des génératrices du cylindre on peut admettre que

$$v = w = 0$$

et les équations du mouvement deviennent alors :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0$$

Or la masse gazeuse est à une température uniforme, donc :

$$p = K\rho$$

En remplaçant p par cette valeur dans les deux équations précédentes elles deviennent :

$$K\frac{\partial . L\rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial . L\rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial . L\rho}{\partial x} = 0$$

Dans la propagation des ondes, la densité ne variant qu'entre des limites peu étendues, on peut poser :

$$\rho = \rho_0 (1 + s)$$

ρ_0 étant la densité du gaz à l'état de repos, s une quantité infiniment petite du premier ordre. D'où on déduit :

$$L\rho = L\rho_0 + s + \dots$$

$$\frac{\partial L\rho}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}$$

Les équations du mouvement deviennent alors en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre $\frac{u\partial u}{\partial x}$ et $u\frac{\partial L\rho}{\partial x}$:

$$K\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Éliminons s entre ces deux équations. A cet effet après avoir différentié la première des équations par rapport à t, la seconde par rapport à x, multiplions la seconde par $-K$ et ajoutons-les, il vient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

équation qui est vérifiée pour

$$u = F(x + t\sqrt{K})$$

$$u = f(x - t\sqrt{K})$$

et qui par suite a pour intégrale générale

$$u = F(x + t\sqrt{K}) + f(x - t\sqrt{K})$$

La valeur de s résulte immédiatement de celle de u. En effet

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt = -\frac{1}{K}\frac{\partial u}{\partial t} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

$$ds = -\frac{F'(x+t\sqrt{K})(dx+\sqrt{K}dt) - f'(x-t\sqrt{K})(dx-\sqrt{K}dt)}{\sqrt{K}}$$

En intégrant il vient :

$$s = -\frac{1}{\sqrt{K}}[F(x+t\sqrt{K}) - f(x-t\sqrt{K})] + C^{te}$$

On peut d'ailleurs supposer nulle cette constante car si on remplace $F(x+t\sqrt{K})$ par $F(x+t\sqrt{K}) + \frac{C\sqrt{K}}{2}$ et $f(x-t\sqrt{K})$ par $f(x-t\sqrt{K}) - \frac{C\sqrt{K}}{2}$, u ne change pas et la constante disparaît dans l'expression de s. On obtient donc finalement pour u et s les valenrs suivantes :

$$u = F(x+t\sqrt{K}) + f(x-t\sqrt{K})$$
$$s = \frac{1}{\sqrt{K}}[f(x-t\sqrt{K}) - F(x+t\sqrt{K})]$$

Supposons que l'ébranlement ait lieu non dans toute la masse gazeuse mais seulement entre les sections droites d'abcisses l et $-l$. En dehors de cet intervalle la masse gazeuse est en repos. Donc $u = s = o$. Par suite pour $t = o$ et pour toutes les valeurs de z non comprises entre $-l$ et $+l$ on a :

$$F(z) + f(z) = o$$
$$F(z) - f(z) = o$$

ce qui exige qu'on ait :

$$F(z) = 0$$
$$f(z) = 0$$

D'autre part si nous considérons une tranche AB répondant à une valeur de x supérieure à l et si nous attribuons au temps une valeur positive

$$x + t\sqrt{K} > l$$

Par suite $F(x + t\sqrt{K})$ est constamment nulle. Donc pour cette tranche AB on peut prendre :

$$u = f(x - t\sqrt{K})$$
$$s = \frac{1}{\sqrt{K}} f(x - t\sqrt{K})$$

De là résulte que l'ébranlement dans une tranche donnée ne se fera que pendant un temps déterminé. En effet nous venons de voir que f était identiquement nulle pour toutes les valeurs de z non comprises entre $-l$ et $+l$

Donc pour la tranche où l'ébranlement a lieu :

$$-l < x - t\sqrt{K} < l$$

ce qui exige qu'on ait :

$$\frac{x - l}{\sqrt{K}} < t < \frac{x + l}{\sqrt{K}}$$

Cherchons maintenant la vitesse de propagation de l'onde. A cet effet considérons deux tranches AB, A'B' séparées par un intervalle a. On dit que l'onde s'est transportée de AB en

A'B' lorsque les variables u et s auront pris dans la tranche A'B' les mêmes valeurs qu'elles avaient primitivement en AB. Or on voit que, x augmentant de a, pour que u et s reprennent les mêmes valeurs, il faut que t augmente de $\frac{a}{\sqrt{K}}$. La vitesse de propagation est donc :

$$v = \sqrt{K} = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Newton est arrivé par cette voie à une évaluation numérique de la vitesse du son dans l'air. Mais le résultat qu'il a obtenu est assez éloigné de la vérité, en raison des phénomènes calorifiques qui accompagnent toujours les vibrations gazeuses.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Notions préliminaires. — Moments

CHAPITRE II

Étude de la vitesse et de l'accélération

CHAPITRE III

Mouvements relatifs. — Composition des vitesses

CHAPITRE IV

Mouvement d'une figure plane dans son plan

CHAPITRE V

Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

CHAPITRE VI

Mouvement d'un corps solide libre

CHAPITRE VII

Mouvement relatif. — Composition des accélérations

